量　子　論

— その数学および構造の基礎 —

Isham 著

佐藤文隆
森川雅博 共訳

物理学叢書
93

吉岡書店

Chris J. Isham

LECTURES ON QUANTUM THEORY
Mathematical and Structural Foundations

ISBN 1-86094-000-5
1-86094-001-3(pbk)

Japanese translation rights arranged
with World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore
through Tuttle–Mori Agency, Inc., Tokyo

はじめに

この本は，私がインペリアルカレッジで1989年から1994年にかけて講義した学部生向けの量子論の講義録に基づいて書かれた．この大学の物理学科の学生は，1年次と2年次，量子論に関してそれぞれ1つ以上の講義をとっていて，私のコースは3年次の理論物理学の選択科目である．だから学生に対して，物理学への数学的アプローチの基本的方法や波動力学の基本，スピンの概念，パウリ行列に関する知識を前提とできたのである．

私の講義の目的は，これらの知識を前提とした学生に，現代量子論の構造的基礎の入門を話すことであった．非相対論に限ったが，量子論の沢山の概念的諸問題を盛り込んだ．

議論はベクトル空間の作用素の理論に基づいている．数学の詳細に振りまわされない範囲で，これを初歩から解説した．例えば，無限次元空間について述べたがその厳密な定式化は避けた．厳密性は重要であるが，数学的詳細が問題の本質を見にくくするのを避けたかったためである．

他方，これは量子論に関する哲学的基礎の教科書を意図したわけでもない．そのような完璧な教科書は最近すでに出版されており，それに対抗しようなどとは思わない．また私は量子論に対する自分の解釈をこと細かく提示しようとしているわけでもない．(ただ私は，量子重力論の視点から量子論の基礎に興味を持っているという事実はあるが.) そうではなくて，目的は一般的内容をバランス良く簡潔に述べることである．実際，多少の注釈を挿入してあるが，もとの講義録の簡潔なスタイルを踏襲している．講義は25回しかなく私は結構早口で話したのである．いずれにせよこのことが，この本の長さに反映している．ベクトル空間の数学を理解してもらうために私が学生に出題した問題とその解答を本に含めた．これらは全体を把握する上で重要な部分で，特に学生が自習するときに役立つだろう．

私の講義に参加して，初期の講義録の不備を指摘してくれたすべての学生に感謝する．鋭い洞察力で意見を述べてくれたSteve Weinstein君には特に感謝する．

最後に，愛する妻Valerieと娘達Nicola，Louiseにこの本を捧げる．多年にわたり彼女らは，ストレスにみんなで堪えながら夫あるいは父として，理論物理屋と驚くほどうまく付き合ってきてくれたのである．

Chris J. Isham

インペリアルカレッジ，1995年3月

目次

第1章　序論

1.1　この本の趣旨

現代物理学では数学が圧倒的に多く用いられる．古典力学においては，ユークリッド空間の3次元ベクトルによる粒子の位置表現は，私たちの日常的な感覚と直接に関係する．対照的に量子論においては，数学的な構造とそれが表現しようとする物理的対象との間はかなりかけ離れている．この隔たりは，学生にとって最初どうしても超える事のできない溝として横たわっている．従って，何を目指して議論していくのか目標をあらかじめ明確にしておく事は有用だろう．

現代物理学の理論構造は，たいてい以下のような準公理的なものである：

1. その理論が適応可能な対象の範疇
2. この範疇に関連付けられた物理的な概念
3. その理論を展開する一般的な数学の枠組みの指定
4. 物理的概念を数学の構成要素に関連付ける一連の法則
5. 法則を記述する基本的用語の意味を解析する包括的な概念的構成
6. その理論が有効な範疇において，特定の物理系に法則を適用するための技術．

このような理論構造を評価する規範は例えば以下のようなものがある．

1. 理論の適用できる範疇はできるだけ大きい
2. その理論は，その範疇において経験的に有効である．

3. その理論を定式化する技術（新しい数学を含むこともある）は数学的に無矛盾である．
4. その理論の「意味」を見出すための物理的および概念的な構造は哲学的に無矛盾である．
5. 全体の理論構成は簡明ですっきりしている．

初期量子論は，有限個の素粒子が静電気力のもとで束縛されて運動するという，非相対論的な原子や分子に適用された．その後量子論の適用範囲は，主に場の理論の立場から，徐々に相対論的な原子・原子核反応を包含するように発展した．これらの定式化は経験的には成功したが,「紫外」発散の問題を生じ，それは根本的には未だに解決されていない．**一般**相対論を取り込む形に量子論を拡大する試みは，数学的・概念的困難に遭遇し，未だ結論を見ていない．この本では適用領域を非相対論的な物理に限るが，多くの概念は相対論化したときにも役立つであろう．

「観測量」や「測定」の概念を重視する操作論的な量子論へのアプローチが沢山ある．それは測定の本質的に確率的な性格を強調することになる．この本の前半はこのようなアプローチで進み，その後あまり操作論的でないアプローチを試みる．いずれにしても，量子論を記述する適切な数学的道具はヒルベルト空間論である[1]．ヒルベルト空間とは，有限または無限次元のベクトル空間で，波動関数の重なりを表現する内積が付与されたものである．

この本は，まず波動力学に関する肝要な概念を，後に一般の量子論を議論するのに適した形でまとめることから始まる．2章と3章では，量子論へのベクトル空間によるアプローチに必要な，ベクトル空間と線形作用素の理論を必要最小限導入する．ただ，無限次元空間に関する数学的に厳密な扱いは完全には行わない[2]．

この本で目指しているのは，量子論における深い概念的問題を探求することである．そのアプローチはたくさんあるが私は，**物理的特性**およびそ

---

1 古典的な参考文献は von Neumann (1971).

2 量子論に使われるベクトル空間論の詳細は，私の本 Isham (1989) で解説してある．量子力学のさらに完全な扱いについては Reed & Simon (1972) のすばらしい仕事がある．

れを量子系が「持っている」ということが意味をなすか否か，に着目したい．そのために量子論そのものの議論を4章の中で，古典論における同じ着目点からの議論とともに述べる．特に，物理を表現するある哲学的な視点が数学的な構成にうまく反映するようにする．古典論では,「実在論」的視点と「操作論」的視点は互いにうまく融合するが，量子論では両者は特に物理的特性の議論において対立する．この対立は，量子論と古典論の数学的構造に由来する．

古典論のイデオロギーを述べた後，量子論の一般規則がベクトル空間の形式でどの様に書けるか，2つの章を使って詳述する．その内容は，ベクトル状態と混合状態，両立する作用素，時間発展，ユニタリー作用素，正準交換関係の導出，そして一般化された不確定性関係などである．ここでは，数学的記述の基本，従って操作論的よりは実用的な記述を強調し，量子論のさまざまな解釈の余地を残しておきたい．

量子論の解釈問題は8章で扱い，概念的な問題に対して形式的に議論しよう．ここの内容は4つの柱からなる:確率の意味，測定の意義，状態ベクトルの収縮，そして量子もつれ．これらの問題は私のように量子宇宙論をより実在論的に展開したい者にとって重要である．この実在論的アプローチは最終章で扱う．この章では，Kochen–Specker の定理，量子論理の導入，そして Bell の不等式を扱う．

この本の末尾には問題と解答を載せた．ベクトル空間論を量子論に応用するのに必要な数学を身につけられるだろう．本文中にも，一般論を理解するためにいくつか問題を挿入してある．

参考文献については，この本が学部生向けの講義録として作られたことを反映して，進んだ学生がすぐに消化できる文献を選定した．これらを見れば，読者は苦労することなく要点をつかみ理解を発展させていけるだろう．序論に述べたとおり，この本は，現代量子論の完全な解説ではなく，学部生向けの小さな教科書として書かれている．

1.2 波動力学のまとめ

初歩的な波動力学の枠組みをまとめることから話をはじめよう．手っ取り早く言えば，波動力学は，5章で一般化される4つの法則からなっている．簡単の為に1次元の運動について述べるが，3次元へはすぐに拡張できる．これらの法則を述べるにあたって，以下の定義を復習しよう．

- 数 a が微分作用素 $\widehat{A}$ の**固有値**であるとは，微分方程式

$$\widehat{A}u(x) = au(x) \tag{1.1}$$

  が，関数 $u(x)$ に対する適切な境界条件 (例えば2乗可積分であること[3]) と共に満たされることである．

  関数 $u(x)$ は，$\widehat{A}$ の固有値 a に対する**固有関数**と呼ばれる．

- **自己共役** (あるいは **エルミート**) な作用素 $\widehat{A}$ とは[4]，

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{A}\psi)^*(x)\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)(\widehat{A}\phi)(x)\,dx \tag{1.2}$$

  があらゆる2乗可積分である波動関数 ψ と ϕ に対して成り立つことである．

これらを念頭において，4つの法則は以下のようになる．

法則 *1.* 1次元的に運動する質点の量子状態は複素数値をとる波動関数 $\psi(x)$ であらわされ，それは1に規格化される：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1. \tag{1.3}$$

---

[3] 関数 ψ は $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx < \infty$ なら **2乗可積分である**.

[4] * は複素共役を意味する．

量子論における決定的な概念は，任意の 2 つの波動関数 ψ_1 と ψ_2 は任意の複素係数 α_1 と α_2 で**重ね合せ**られて，新しい波動関数 $\alpha_1\psi_1(x)+\alpha_2\psi_2(x)$ を与えることである．(ただし，α_1 と α_2 はこの新しい波動関数の大きさが 1 になるように設定されなければならない)．

法則 *2.* 任意の測定可能な物理量 (つまり 観測量) は，波動関数に作用する線形微分作用素で表現され，それは自己共役である．

法則 *3.* (i) 観測量 A の測定の結果は，自己共役作用素 $\widehat{A}$ のひとつの固有値で与えられる．

(ii) 簡単の為に，縮退が無く (つまり $\widehat{A}$ の同じ固有値の任意の 2 つの固有関数はお互いに比例する) $\widehat{A}$ はただ離散的な固有値 $a_1, a_2, \ldots$ を持ち，対応する波動関数は $u_1, u_2, \ldots$ であるとしよう．すると，量子状態 $\psi(x)$ にあるとき，A の測定において特定の固有値 a_n をとる確率は

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A=a_n;\psi)=|\psi_n|^2} \tag{1.4}$$

で与えられる．ここで複素数 ψ_n は，$\widehat{A}$ の規格化された固有関数による，波動関数 $\psi(x)$ の展開係数である：

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n u_n(x). \tag{1.5}$$

法則 *4.* 状態関数はシュレーディンガー方程式

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\widehat{H}\psi(x,t)} \tag{1.6}$$

に従って時間発展する．ここで，ハミルトン作用素 $\widehat{H}$ は古典的なエネルギーの表式

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(x) \tag{1.7}$$

において，運動量 p と位置 x を，それぞれの対応する作用素 $\widehat{p}$ と $\widehat{x}$ に置き換えることによって得られる．

解説

1. 固有値，固有関数，自己共役作用素は量子論への応用に対して3つの重要な数学的性質を持つ．

- 固有値は実である．なぜならそれらが測定の結果得られる数値だから．
- 固有関数の組は完全系をなす．つまり，どんな波動関数も式 (1.5) のように唯一に展開される．
- 規格化された固有関数の組は直交性を満たす．

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_m^*(x)u_n(x)\,dx = \delta_{mn}. \tag{1.8}$$

ここで，δ_{mn} はクロネッカーのデルタ，つまり $m = n$ のとき1，それ以外で0である．

これらの帰結として，式 (1.5) の中の展開係数 ψ_n は波動関数 $\psi(x)$ から

$$\psi_n = \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x)\psi(x)\,dx \tag{1.9}$$

と書ける．特に，展開係数は唯一に決まる．

この結果から，2つの波動関数 ψ と ϕ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\phi(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*\phi_n \tag{1.10}$$

であることと，特別な場合として

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 \tag{1.11}$$

が成り立つことがわかる．従って，ψ が式 (1.3) のように規格化されていれば

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Prob}(A = a_n; \psi) = 1} \tag{1.12}$$

となる．これはつまり，測定の結果何らかの結果になる確率は 1 ということであり，整合的な確率的解釈の要件であった．

2. 法則 3 によると，観測量 A を繰り返し測定したときの長時間平均は

$$\langle A \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)(\widehat{A}\psi)(x)\,dx \tag{1.13}$$

で与えられる．

3. 上の法則には，物理系の特定の観測量に対してどのように作用素を構成するかが述べられていない．この構成には通常「対応規則」を用いる．つまり，古典的観測量 $A(x,p)$ には作用素 $A(\widehat{x},\widehat{p})$ が対応するのである．（後に見るように，これだけでは唯一には決まらない．）　これは法則 4 において既に使われている．つまり，量子論的ハミルトン作用素は式 (1.7) の対応によって得られる．

しかし，作用素 $\widehat{x}$ および $\widehat{p}$ が指定されていないので，理論はまだ不完全である．突き詰めるとこれは，古典系に対してどの様に量子系を構成するかというもっと一般的な問題になる．初等的な波動力学においては，位置と運動量の作用素は次のように与えられると要請する．

$$(\widehat{x}\psi)(x) \quad = \quad x\psi(x), \tag{1.14}$$

$$(\widehat{p}\psi)(x) \quad = \quad -i\hbar\frac{d\psi}{dx}(x). \tag{1.15}$$

これらはよく知られた「正準交換関係」を満たす：

$$[\widehat{x},\widehat{p}] = i\hbar. \tag{1.16}$$

4. 角運動量は量子論のいろいろな側面で重要になる．波動力学においては，上で定義された作用素を用いて定義される．つまり，古典力学にお

ける角運動量成分，$L_x = yp_z - zp_y$，$L_y = zp_x - xp_z$，$L_z = xp_y - yp_x$ に対して，量子作用素は対応原理を用いて与えられ，$\widehat{L}_x = \widehat{y}\widehat{p}_z - \widehat{z}\widehat{p}_y$, $\widehat{L}_y = \widehat{z}\widehat{p}_x - \widehat{x}\widehat{p}_z$. $\widehat{L}_z = \widehat{x}\widehat{p}_y - \widehat{y}\widehat{p}_x$ となる．

式 (1.16) から角運動量が次の交換関係を満たすことはすぐ確かめられる．

$$[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] = i\hbar\widehat{L}_z \tag{1.17}$$

$$[\widehat{L}_y, \widehat{L}_z] = i\hbar\widehat{L}_x \tag{1.18}$$

$$[\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] = i\hbar\widehat{L}_y \tag{1.19}$$

従って，

$$[\widehat{L}\cdot\widehat{L}, \widehat{L}_x] = [\widehat{L}\cdot\widehat{L}, \widehat{L}_y] = [\widehat{L}\cdot\widehat{L}, \widehat{L}_z] = 0 \tag{1.20}$$

もわかる．ここで，全角運動量作用素 $\widehat{L}\cdot\widehat{L}$ は和 $\widehat{L}_x\widehat{L}_x + \widehat{L}_y\widehat{L}_y + \widehat{L}_z\widehat{L}_z$ で定義される．式 (1.20) のように交換関係が消えるということは，作用素 $\widehat{L}\cdot\widehat{L}$，及び $\widehat{L}_x$，$\widehat{L}_y$，$\widehat{L}_z$ のうちのどれかひとつ[5]，が同時に固有関数を持てることを意味する．どれも同じなので，z 軸が上に向いている座標系においては通常 $\widehat{L}_z$ が選ばれる．

それらの同時固有関数のあからさまな形および固有値を求める作業は，波動力学のコースでお決まりの計算である．良く知られた結果は，作用素 $\widehat{L}\cdot\widehat{L}$ の固有値は，ℓ を $\ell \geq 0$ である整数として，$\ell(\ell+1)\hbar^2$ である．任意の ℓ に対して, 作用素 $\widehat{L}_z$ に対する固有値は $m\hbar$ である．ここで，整数 m は $-\ell$ から $+\ell$ まで動く．対応する固有関数 u_{lm} はおなじみの**ルジャンドル陪多項式**である．

1.3 波動力学を超えて

波動力学の考え方や法則は広く使われて，実に良く実験事実を説明し

[5] **ひとつだけ**である．というのは，例えばペア $\widehat{L}\cdot\widehat{L}$ と $\widehat{L}_z$ の同時固有関数は，ペア $\widehat{L}\cdot\widehat{L}$ と $\widehat{L}_x$，あるいは ペア $\widehat{L}\cdot\widehat{L}$ と $\widehat{L}_y$ の同時固有関数と一致しないからである．

てきた．しかしながら重要な問題があいまいなままにされてきている．例えば，

- 量子論に現れる「確率」の正確な意味は何だろう？そして,「測定」ということがそんなに重要な役割を担うのだろうか？測定は，やはり普通の物理的な相互作用なのか，それとも別の理論形式が要請される基本的な概念なのだろうか？後者であるとすると，測定装置というものが結局量子論で記述される原子から構成されている，という事実とどのように折り合いをつけるのだろうか？

- $\widehat{x}$ や $\widehat{p}$ に対応する作用素の式 (1.14–1.15) (および正準交換関係，式 (1.16)) は理論の一般的枠外から要請されるものなのか，それとも枠内で**導出**されるものなのか?

- 正準交換関係の式 (1.16) を満たす作用素の組は $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ で尽きているのか?もし他にもあるならば，物理的な予測はどの組を取るかによって違ってくるのだろうか? 言い換えると，正準交換関係の式 (1.16) と特定の表現式 (1.14–1.15) とどちらが根源的なのだろうか?関係式 (1.16) を満たす他の表現は明らかに存在する．例えば，状態 ϕ が運動量 p の関数として (座標 x ではなくて) 波動力学を表現したとき，基本的な作用素 $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ は

$$(\widehat{x}\phi)(p) = i\hbar\frac{d\phi}{dp}(p) \tag{1.21}$$

$$(\widehat{p}\phi)(p) = p\phi(p) \tag{1.22}$$

  のように表現され，式 (1.14–1.15) で定義されたときと同じように，正準交換関係式 (1.16) を満たす．通常どちらの表現でも波動力学は同じ物理的答えを出すとされている．しかし，どうしてそうなっているのか?

- 正準交換関係式 (1.16) に付随する「不確定性関係」$\triangle x \triangle p \geq \frac{1}{2}\hbar$ の意味するところは何か? ここの $\triangle x$ は，通常言われているよう

に「測定における回避できない擾乱」なのか，あるいは異なる理解の仕方はあるのだろうか?

- 不確定性関係は，交換しないどんな作用素の組に対しても一般化できるのだろうか? 例えば，角運動量作用素 $\widehat{L}_x$，$\widehat{L}_y$ と $\widehat{L}_z$ は式 (1.17–1.19) のように循環的な交換関係を示すが，これに対してはどうだろう．

以上のような質問は，量子論の解釈や物理的実在観念に対する悩ましい問題の詰まったパンドラの箱を開けてしまう．これらの問題にどの様に立ち向かっても，必ず深遠で哲学的な問題に行き当たってしまう．そしてそれは未解決で，現在でも盛んに議論されている難問なのである．この本の大きな目標のひとつは，これら深遠な量子論的世界観へ読者を案内することである．

しかし，技術的な面でも上述の基本原理はいくつかの面で不完全だし，ほんの限られた物理系にしか適用できない．単に波動力学を3次元空間に拡張して状態を粒子の位置ベクトル $\mathbf{x}$ の関数として $\psi(\mathbf{x})$ と表したり，N-粒子系に応用して，状態を N 個の位置ベクトル $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_N}$ の関数として $\psi(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_N})$ と表したりすることはすぐできる．しかし，波動力学ではどうしても書ききれない重要な物理系が沢山あるのである．

そのひとつは相対論的量子論で，そこでは相互作用により粒子数が変化してしまう．例えば，2粒子が衝突して3粒子になる散乱過程を考えよう．スピンなどの内部自由度を無視すれば，初期と終期の状態はそれぞれ波動関数 $\psi(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$ と $\phi(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3})$ と書ける．しかし，時間に依存したシュレーディンガー方程式が，2変数の関数から3変数の関数へ連続に，どの様に変化を記述できるかは全く明らかではない．

もうひとつ，波動力学では記述できない有名な例は電子スピンである．内部自由度であるスピンに着目すると，電子の状態は縦行列[6] $\binom{a_1}{a_2}$ で表される．ここで，式 (1.3) に類似な規格化条件は複素数 a_1 と a_2 に対し

---

6 縦行列は縦**ベクトル**と呼ばれる．実際，後で見るように，状態はあるベクトル空間の要素だと考えられるのである．

て $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ となる．このような二つの状態 $\binom{a_1}{a_2}$ と $\binom{b_1}{b_2}$ を，複素係数 α と β の重みで重ね合せて新しい状態 $\alpha\binom{a_1}{a_2} + \beta\binom{b_1}{b_2}$ が作られる．(α と β は規格化を壊さないような任意の複素数である．) これは縦行列 $\binom{\alpha a_1+\beta b_1}{\alpha a_2+\beta b_2}$ と定義される[7]．

この系で観測量は，行列の掛け算によって状態に作用する 2×2 の複素エルミート行列[8] で表現される．これは，上に述べた重ね合せの規則に関して**線形**である．

特に，スピン角運動量の x，y，z 成分はそれぞれ，$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$，$S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$，$S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ で表される．ここで，σ_x，σ_y，σ_z は良く知られたパウリ行列である：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

スピン作用素 $\widehat{S}_x$，$\widehat{S}_y$，$\widehat{S}_z$ は，角運動量 $\widehat{L}_x$，$\widehat{L}_y$，$\widehat{L}_z$ と同じように，循環的交換関係式 (1.17–1.19) を満たすが，それらは微分作用素では決して表されない．

他にも，波動関数では書けない量子系はアイソスピン，ストレンジネス，チャームなど沢山ある．これらを記述するためには量子論を目いっぱい一般化して書き換えなければならない．もちろん波動力学の正しい結果を再現するようにしなければならない．この具現化がこの本の目標のひとつである．

---

[7] 次章でこの定義の重要性がわかるだろう．

[8] 正方行列 A が**エルミート**であるとは，$A = (A^T)^*$ が満たされることである．ここで，A^T は A の転置である．行列要素で言えば，$A_{ij} = A^*_{ji}$ のことである．

第2章　ベクトル空間

2.1　確率の表現

2.1.1　古典的な確率の表現

波動力学の基本的な要点は2つある：(i) 2つの波動関数は足し合わされて新しい波動関数を作る．(ii) 観測量は線形な (微分) 作用素で表現される．ここで，(ii) はこの重ね合せの原理 (i) を壊さない．しかしながら，波動関数では表現でき**ない**量子系の例はたくさんある．さらに，たとえ波動関数で表現できても，上記のような特徴をあからさまには満たさない表現が可能な系もある．それにもかかわらず，線形の重ね合せの原理はあらゆる場合に本質的に普遍的であり，この原理は数学的には**ベクトル空間**の概念を用いて表現できる．

ベクトル空間は，とりわけ確率の表現において，理論物理学で重要な役割を担っている．例えば，物理系が観測量 A を持っていて，その取りうる値は有限な集合 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ であるとしよう．この系が状態 s にあるとき，A の測定[1] によって値 a_i を得る確率 $\mathrm{Prob}(A = a_i; s)$，$i = 1, 2, \ldots, N$ をどのように付与するか考えてみよう．

確率を付与するとき，実数 $\mathrm{Prob}(A = a_i; s)$，$i = 1, 2, \ldots, N$，は次の二つの条件を満たさなければならない．

---

[1] 「測定の結果」によって状態を記述するのは道具論的な見方である．もっと実在論的な見方は，特定の時間に状態は，A が値 a_i を**とる**確率を持っている，と考える．これら二つの見方は古典力学では同じことであるが，後に見るように量子論においてはお互いにはっきりと異なるのである．

$$0 \le \mathrm{Prob}(A = a_i; s) \le 1 \tag{2.1}$$

および

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Prob}(A = a_i; s) = 1. \tag{2.2}$$

初めの要請は，通常の**相対頻度**の解釈では，特定の結果の確率は，測定を何度も繰り返したときに何度その結果が得られるかという割合で定義されるからである．(もちろん，毎回の測定の前に，状態は s にリセットするのである.) その比は当然 0 と 1 の間にある．くどく言えば，もし値 a_i が**決して**得られないのであれば $\mathrm{Prob}(A = a_i; s) = 0$ であるし，いつも a_i が得られるのであれば $\mathrm{Prob}(A = a_i; s) = 1$ である．値 $\mathrm{Prob}(A = a_i; s)$ が 0 と 1 の間にあるのは，A の測定が a_i の時もあるしその他の値のときもある状況である．次の条件式 (2.2) は，**何らかの** 結果を得る確率は 1 であるという事実の表現である．

上の条件式 (2.1–2.2) を満たす数を作る古典的な方法は「一般化された体積」を扱う測度論を用いることである．例として，X を直交座標 $x^1, x^2, \ldots, x^N$ で書かれる平坦な空間の中の N 次元領域だとしよう．すると，領域 X の標準的な体積は[2]

$$\mathrm{vol}(X) := \int \ldots \int_X dx^1\, dx^2 \ldots dx^N \tag{2.3}$$

で与えられる．ここで積分領域は X である．領域 X_1 と X_2 が重なりを持たなければ，上の定義から，この積分は加法的である：

$$\mathrm{vol}(X_1 \bigcup X_2) = \mathrm{vol}(X_1) + \mathrm{vol}(X_2). \tag{2.4}$$

体積がすべて有限であれば，これは $\mathrm{vol}(X_1 \bigcup X_2)/\mathrm{vol}(X) = \mathrm{vol}(X_1)/\mathrm{vol}(X)$ $\mathrm{vol}(X_2)/\mathrm{vol}(X)$ を意味する．

こんどは，領域 X はそれぞれの体積が $V_1, V_2, \ldots, V_N$ であるようなお互いに重ならない領域 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ に分割されるとしよう．それらを

[2] 記法 $A := B$ は，A と B の等号関係でなく，左辺 (A) が右辺 (B) で**定義** されることを言う．

合わせると X である．すると，積分の加法性から $\sum_{i=1}^{N} V_i = V$ (X の体積)，つまり，$\sum_{i=1}^{N} V_i/V = 1$ であることがわかる．さらに，X_i は X の部分集合なので，$0 \leq V_i \leq V$，つまり，$0 \leq V_i/V \leq 1$ であることがわかる．このように，$\mathrm{Prob}(A = a_i; s)$ が V_i/V であるとすれば，条件式 (2.1) と式 (2.2) は自動的に満たされる．

ここで積分の加法性が重要であった．これにより，確率を $\mathrm{vol}(X_i)/\mathrm{vol}(X)$ として良かったのである．この加法性は，次のような「一般化された体積」に対しても成立する：

$$\mathrm{vol}_\rho(X) := \int \cdots \int_X \rho(x^1, x^2, \ldots, x^N) dx^1\, dx^2 \ldots dx^N. \tag{2.5}$$

ここで，ρ は任意の正の積分可能な X 上の関数である．ρ は $\mathrm{vol}_\rho(X) = 1$ のように規格化しておいても何ら一般性を失わない．こうすれば，確率は

$$\mathrm{Prob}(A = a_i; \rho) = \mathrm{vol}_\rho(X_i) = \int \cdots \int_{X_i} \rho(x^1, x^2, \ldots, x^N) dx^1\, dx^2 \ldots dx^N \tag{2.6}$$

のように定義できる．この例においては，系の「状態」は数学的には**確率密度**関数 ρ によって表現されている．領域 X や関数 ρ を違うようにとれば A の確率分布のいろいろなモデルになる．この概念はもっと一般化されて「確率密度」の概念に導く．これについては，古典物理の確率を扱う 4.3 章において簡潔に述べる．

2.1.2 量子確率の起源

以上に述べた確率を構成する方法は，古典的統計力学や熱力学を含め**すべての**確率論の数学的基礎になっている重要なものである．しかし，量子論で用いられる確率は，このような方法で**なく**，ピタゴラスの定理によるかなり異なった構成法に基づく．

それを説明するために，図 2.1 にあるように 2 次元空間のベクトルによって作られる直角三角形を考えよう．ピタゴラスの定理は　$a^2 + b^2 = c^2$，

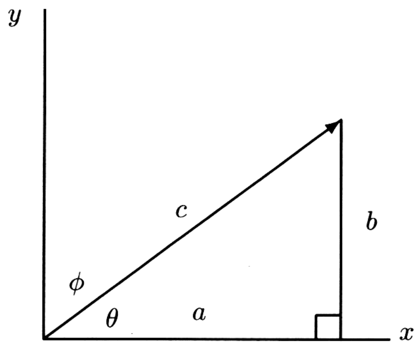


図 2.1: 2次元ピタゴラス定理

つまり $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$ を言う．これは単に $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ あるいは同じことだが，

$$\cos^2\theta+\cos^2\phi=1 \tag{2.7}$$

ということである．ここで，θ（ϕ）は，考えているベクトルと x 軸（y 軸）がなす角度である．余弦の2乗は0と1の間の数なので，式 (2.7) によると，観測量 A に対して可能な値が2つしかない場合 a_1 と a_2 には，$\mathrm{Prob}(A=a_1;s)$ と $\mathrm{Prob}(A=a_2;s)$ に対して，それぞれ $\cos^2\theta$ と $\cos^2\phi$ を付与するというモデルが考えられる．考えているベクトルあるいは座標 x，y を決めている基準ベクトルをいろいろ変えれば，異なる確率分布（例えば，異なる状態 s や異なる観測量）を与えることになる．

以上の例はすぐに3次元に拡張できる．3次元の単位ベクトル $\mathbf{v}$ が空間座標の3つの軸 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ となす角度をそれぞれ θ_1，θ_2，θ_3 としよう．つまり $\cos\theta_1=\mathbf{i}\cdot\mathbf{v}$，$\cos\theta_2=\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}$，$\cos\theta_3=\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ である．すると，よく知られているように (例えば結晶格子のミラー係数の理論)

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1 \tag{2.8}$$

である．これで観測量が**3個**の可能な値を持つ場合の確率モデルができあがった．

この構成法は任意の次元—注意すれば無限次元でも—に適用され，量子論の一般的な数学的枠組みとなる．(ただ，量子論ではここのように実数でなく複素数を用いるが)．まとめると，状態はベクトル空間のベクトルで表現され，各観測量には **i**，**j**，**k** を一般化したベクトルの組が対応する．これらのベクトルの一つ一つは観測量の特別な値に相当して，その値を得る確率は（正確には複素数で考え直さなければならないが）そのベクトルと状態を表すベクトルとの成す角度の余弦の 2 乗で表されるのである．古典論の確率と量子論の確率の差異は，体積の比で定義されたかそれともピタゴラスの定理から定義されたかの違いに由来する，と考えておいて良いだろう．

2.2 波動関数から状態ベクトルへ

1 章で簡単に述べた電子のスピン状態を表現する縦行列 $\binom{a}{b}$ を，あるベクトル空間の要素と見られるだろうか？特に行列 $\binom{a_1}{a_2}$ と $\binom{b_1}{b_2}$ の線形結合 $\alpha\binom{a_1}{a_2} + \beta\binom{b_1}{b_2}$（$\alpha$ と β は複素数）とは何だろうか？このような結合操作は，量子状態の持つ重ね合せの原理を保持するために必要なのである．結局我々は，(i) 縦行列に複素数を掛けることと (ii) 二つの縦行列を足し合わせること，をどのように定義したら良いかという問題を考えることになる．

必要なのは「定義」であって，縦行列の線形結合に対する**先験的な**意味は無い．このために必要な数学は一般的で，既に波動力学において登場している．そこでは，系の状態は**関数**—つまり，実数（1 次元の運動の場合）から複素数への**写像**—で表現されていた．そしてそのような写像の線形結合とは何かを定義することが必要なのである．波動関数の線形操作をまず**定義**することが必要だという事実は，波動力学の初等コースでは通常述べられない．でも，量子論の数学的枠組みを構成する上でこのことは実は重要なことである．

波動関数に対する定義は以下のようである．写像 ψ に対して[3]，$\lambda \in \mathbb{C}$ なる λ を用いて新しい写像 $\lambda\psi$ は，$x \in \mathbb{R}$(実数全体) なる任意の x に対して数を決定できれば定義できる．2つの関数 ψ と ϕ の和も同様．初等波動力学で暗黙のうちに適切に使われていた定義は，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(\lambda\psi)(x) := \lambda\psi(x) \tag{2.9}$$

と

$$(\psi + \phi)(x) := \psi(x) + \phi(x) \tag{2.10}$$

である．これらの定義において右辺は，よく知られた複素数の積と和の操作しか用いていない．

縦行列の線形結合とは何かを考える為に，簡単な場合として自己共役な微分作用素 $\widehat{M}$ の2つの固有関数 u_1, u_2 の線形結合から作られる状態だけを考える場合を考察しよう (例えば，レーザー機構の簡単なモデルとしてよく引き合いに出される2準位状態の系)．つまり，

$$\begin{aligned} \widehat{M}u_1(x) &= m_1 u_1(x) \\ \widehat{M}u_2(x) &= m_2 u_2(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

ここで，m_1 と m_2 ($m_1 \neq m_2$) は対応する固有値である．

このモデルは，$\widehat{N}u_1$ と $\widehat{N}u_2$ が u_1 と u_2 だけの線形結合であるような性質を持つ作用素 $\widehat{N}$ の場合にも成立する．

これらの状態を含む最も一般的な (規格化されていない) 波動関数は $\psi(x) = \psi_1 u_1(x) + \psi_2 u_2(x)$ と書ける．ここで ψ_1 と ψ_2 は任意の複素数である．状態 ψ は，ψ_1 と ψ_2 の値によって完全に決まるのでそれは不定性無しに縦行列 $\binom{\psi_1}{\psi_2}$ でかける．このように，縦行列と波動関数であらわされる状態とは1対1に対応するのである[4]．

---

[3] 記法 $x \in X$ は，x が集合 X に属することを言う．記号 $\mathbb{C}$ は複素数全体を意味する．

[4] 誤解のないように付け加えておくと，電子のスピン状態をこのように表現する意味のある波動関数の組は存在しない．にもかかわらず波動関数の例は，縦行列にどのように代数操作を施したらよいかについて正しい指針を与える．

例えば，波動関数 $\psi(x) = \psi_1 u_1(x) + \psi_2 u_2(x)$ と $\phi(x) = \phi_1 u_1(x) + \phi_2 u_2(x)$ はそれぞれ縦行列 $\binom{\psi_1}{\psi_2}$ と $\binom{\phi_1}{\phi_2}$ によって表現される．一方式 (2.9) によると，$(\lambda\psi)(x) = \lambda(\psi(x)) = \lambda\psi_1 u_1(x) + \lambda\psi_2 u_2(x)$ である．要するに $\lambda\psi$ は二つの複素数 $\lambda\psi_1$ と $\lambda\psi_2$ つまり $\binom{\lambda\psi_1}{\lambda\psi_2}$ によって表現されることになる．同様に，式 (2.10) から，$(\psi+\phi)(x) = \psi_1 u_1(x) + \psi_2 u_2(x) + \phi_1 u_1(x) + \phi_2 u_2(x) = (\psi_1 + \phi_1)u_1(x) + (\psi_2 + \phi_2)u_2(x)$ なので，$\psi + \phi$ は二つの数 $\psi_1 + \phi_1$ と $\psi_2 + \phi_2$，つまり縦行列 $\binom{\psi_1+\phi_1}{\psi_2+\phi_2}$ によって表現される．このように，正しい縦行列の操作は

$$\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

および

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

であることがわかる．

上の議論は，有限個の固有関数の組 $u_1, u_2, \ldots, u_N$ を使って波動関数が $\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i u_i(x)$ と展開できる任意の場合に拡張できる．また，無限個の固有関数の場合にも，無限和 $\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i u_i(x)$ の意味をはっきりさせれば，(2.5 節参照) 拡張できる．どんな波動関数も，自己共役な作用素の固有関数で展開できるので，**どんな**波動力学系の状態もいつも無限次元の縦行列で表現される．もともとハイゼンベルグはこの形で量子論を発見したのである．

電子のスピン状態についても，重ね合せの法則は式 (2.12–2.13) で表されるであろうと考えられる．しかしもう一度強調するがこの場合には，重ね合せの法則，式 (2.12–2.13) を正当化する波動理論は無い．波動力学の場合に結合則が式 (2.9–2.10) で仮定されたのと同じように，重ね合せの法則，式 (2.12–2.13) は**はじめから**スピンの系に対して与えられたものと考えるしかない．理論物理学ではいつもそうであるが，理論の正当性や仮定の妥当性は，究極的にはその結果としての理論が経験を説明するか否かにかかっている．

数学的視点からは，我々の目的は，以上のような波動関数や縦行列の重

ね合せの定義を特別な場合として含む，統括的枠組みを構成することである．これはベクトル空間の概念によって実現する．

2.3 ベクトル空間の定義

2.3.1 群の概念

ベクトル空間の本質を説明する方法は沢山ある．ひとつの可能性は，式 (2.9–2.10) と式 (2.12–2.13) の中の操作の特徴を引き出すことである．もうひとつはニュートン力学でおなじみの 3 次元ベクトルの操作をもとに構成する方法である．いずれにおいても，ベクトル空間の基本概念は

1. 二つのベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ を結合して，$\vec{u}+\vec{v}$ と書かれる新しいベクトルを得る方法が指定されていて，
2. 任意の数 λ とベクトル $\vec{v}$ に対して $\lambda\vec{v}$ と書かれる新しいベクトルが付随していることである．(量子論では λ は複素数でニュートン力学では実数である．)

さらに，これらの結合則は**線形性**も併せ持たなければならない．

結合則は数学の多くの分野で重要であるが，群論においては際立って重要である．ある種の量子論 (例えば特殊相対論を枠組みとした相対論的量子論) では，群とその表現が大切な役割をになう．この本では群論を最小限しか扱わないが，ここで基本概念を述べておこう．

定義　**群** とは集合 G であって，$a, b \in G$ に対してもう一つの要素 $ab \in G$ を与える「積」が付与されている．その積は以下の 3 つの公理を満たす:

1. 積は**結合則**を満たす．つまり，任意の元 $a, b, c \in G$ に対して $a(bc) = (ab)c$ であること．
2. **単位** 要素（$e \in G$）があって
   任意の $g \in G$ に対して，$ge = eg = g$ を満たす．

3. それぞれの元 $g \in G$ に対して**逆元**（g^{-1} と書かれる）があって，$gg^{-1} = g^{-1}g = e$ を満たす[5]．

群は，任意の元 $a, b \in G$ に対して $ab = ba$ であるとき，**アーベル的** (あるいは**可換**) であるという．

例

1. 自明でない最も簡単な群は 2 つの要素からなるものである．例えば，行列 $e := \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ と $a := \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ からなる集合を考える．通常の行列の積を考え，単位元として $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ をとり，逆を $a^{-1} := a$ と定義すると，上の 3 つの公理が満たされる．唯一の自明でない積は

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

である．基本的な積の演算は $ee = e$，$ea = a$，$ae = a$ と $aa = e$ で尽きる．明らかにこの群はアーベル的である．

次に，二つの実数 $\{1, -1\}$ からなる集合を考える[6]．これは，単位元を $1, -1$ の逆元を -1 と定義すると．通常の積について群を成す．唯一の自明でない積は $(-1)(-1) = 1$ である．従って，1 と -1 をそれぞれ e と a と書けば，上と同じ群の積の法則を得る．

このように，2 つの集合 $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{smallmatrix}\right)\right\}$ と $\{1, -1\}$ とは，集合として明らかに違うが，(適当な積の規則を与えて) 抽象的な群としての構造は**同じ**である．このときこれらの 2 つの群は互いに**同型**であるという．これは以下簡略に議論する．これら 2 例に表現される抽象的な群は通常 $\mathbf{Z}_2$ と書かれ，次数 2 の**巡回群**として知られている．

2. 零でない実数の集合 $\mathbb{R}_*$ は通常の積に対してアーベル群を成す．単位元は 1 であり，任意の数 $r \in \mathbb{R}_*$ の逆元は単に数値 $\frac{1}{r}$ である．

3. 実数全体 $\mathbb{R}$ は通常の和を積としてアーベル群を成す．単位元は 0 であり，r の逆元は $-r$ である．二つの群 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}_*$ を複素数に拡張したものも類似の群を成す．

---

[5] これらの公理から，単位元と各逆元は一意的であることがすぐ出てくる．

[6] 記法 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ は，要素が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ である集合をあらわす．

4. 非アーベル群の重要な例は，行列式が零でない（$\det A \neq 0$）$N \times N$ 実行列 A の集合 $GL(N, \mathbb{R})$ ($N > 1$) である．積は行列としての積，つまり $(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{N} A_{ik}B_{kj}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ で与えられ，単位元は対角行列 $\mathbb{1} := \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ である．逆元は行列としての逆 ($\det A \neq 0$ によって存在が保証される) で与えられる．この群は**実一般線形群**として知られている．

同様に**複素一般線形群** $GL(N, \mathbb{C})$ は，逆行列を持つ $N \times N$ 複素行列から定義される．

2.3.2 ベクトル空間の基本概念

群論について少し触れたので，ベクトル空間の定義に戻ろう．

定義 (複素)[7] **ベクトル空間**は次のような集合 V である：任意の 2 要素 $\vec{u}, \vec{v} \in V$ に対して結合規則があって，$\vec{u} + \vec{v}$ と書かれる第 3 の要素が備わっている．さらに，(**スカラー積**と呼ばれる) 結合規則があって，任意の $\vec{v} \in V$ および，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda\vec{v}$ (まれに $\vec{v}\lambda$) と書かれるベクトルが備わっている．そしてこれらの結合規則は，以下の要件を満たす．

1. 結合規則「+」によって V はアーベル群をなす．つまり，

- **(a)** 任意の $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ に対して結合律を満たす: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- **(b)** **零**ベクトル $\vec{0}$ (アーベル群の単位元) があって，任意の $\vec{v} \in V$ に対して $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ を満たす．
- **(c)** 任意のベクトル $\vec{v} \in V$ に対して $-\vec{v}$ と書かれる[8] 逆元が存在して，$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
- **(d)** 任意の $\vec{u}, \vec{v} \in V$ に対して $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

---

[7] **実** ベクトル空間は，複素数の代わりに実数を用いて定義される．

[8] 通常，アーベル群の元 a の逆元は $-a$ (a^{-1} でなくて) と書かれ，a, b の「積」は $a + b$ (ab でなく) と書かれる．また，$a + (-b)$ を $a - b$ と書くのも慣例である．

2. 結合規則「+」は，スカラー積の規則や複素数の通常の和・積の規則と整合的であること．つまり，任意の $\vec{u}, \vec{v} \in V$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{u}+\vec{v}) &= \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v} && (2.15)\\ (\alpha+\beta)\vec{v} &= \alpha\vec{v}+\beta\vec{v} && (2.16)\\ \alpha(\beta\vec{v}) &= (\alpha\beta)\vec{v} && (2.17)\\ 1\vec{v} &= \vec{v} && (2.18)\\ 0\vec{v} &= \vec{0} && (2.19) \end{aligned}$$

例

1. ニュートン物理学で使われるすべてのベクトルの集合 $\mathbf{v}$ は，通常のベクトル演算に関して，上の意味で実ベクトル空間である．

2. すべての $N \times 1$ 複素縦行列の集合 $\mathbb{C}^N$ は，以下の演算に関して複素ベクトル空間をなす．

$$\lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_N \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

および

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1+d_1 \\ \vdots \\ c_N+d_N \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

零ベクトルは

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

これは，以前の 2×1 の例，式 (2.12–2.13) を $\mathbb{C}^N$ に拡張したものに過ぎない．

同様に，すべての $N\times 1$ 実縦行列の集合 $\mathbb{R}^N$ は，同様の演算に関して実ベクトル空間をなす．

3. 最も簡単な $\mathbb{C}^1$ は複素数の集合である．ベクトル空間としての結合規則は通常の加法であり，スカラー積は通常の複素数の積である．

4. すべての複素数の無限列 $(c_1, c_2, \dots)$ の集合 $\mathbb{C}^\infty$ は，式 (2.20–2.21) と類似な演算に関してベクトル空間をなす．

5. すべての $N\times N$ 複素行列 $M(N,\mathbb{C})$ は以下の演算に関してベクトル空間をなす．

$$\lambda\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda c_{11} & \lambda c_{12} & \dots & \lambda c_{1N} \\ \lambda c_{21} & \lambda c_{22} & \dots & \lambda c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda c_{N1} & \lambda c_{N2} & \dots & \lambda c_{NN} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

および，

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{NN} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{11}+d_{11} & c_{12}+d_{12} & \dots & c_{1N}+d_{1N} \\ c_{21}+d_{21} & c_{22}+d_{22} & \dots & c_{2N}+d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}+d_{N1} & c_{N2}+d_{N2} & \dots & c_{NN}+d_{NN} \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

同様の定義が，すべての実 $N\times N$ 行列の実ベクトル空間 $M(N,\mathbb{R})$ に対しても成り立つ．両定義とも，**矩形** 行列を含む形に直ちに一般化できる．

6. 任意の集合 X と任意のベクトル空間 V に対して，X から V へのすべての写像 $\mathrm{Map}(X,V)$ は，以下の演算に関してベクトル空間をなす：

任意の $x \in X$，任意の $\psi, \phi \in \mathrm{Map}(X, V)$，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，

$$(\lambda\psi)(x) := \lambda\big(\psi(x)\big) \tag{2.24}$$

および

$$(\psi + \phi)(x) := \psi(x) + \phi(x). \tag{2.25}$$

V のベクトル空間としての構造は式 (2.24) と式 (2.25) に明らかである．

最も簡単な $V = \mathbb{C}$，$X = \mathbb{R}$ という特別な場合はすでに式 (2.9–2.10) において考察済みである．$X = \mathbb{R}^N$ と選べば，$\mathrm{Map}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ の元は $\mathbb{R}^N$ から $\mathbb{C}$ の中への写像であるから，これは，実 N 変数の複素数値関数とみなせる[9]．特に，N 次元の初等波動力学において，波動関数の全体 $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ は自然にベクトル空間の構造をもっている．つまり進んだ量子論においてベクトル空間を使うのは，本来波動力学のもっていた数学的構造の自然な一般化になっているのである．

2.3.3 線形写像と同型

数学で**射**（*morphism*）の概念は普遍的で大変重要である．これは同じ類型の 2 つの構造（2 つの群，2 つのベクトル空間，など）の間の写像であって，構造と整合的なものを言う．例えば，群 G_1 と群 G_2 の間の射とは，任意の $a, b \in G_1$ に対して $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ を満たす写像[10] $\phi : G_1 \to G_2$ である．(群論では，そのような写像は普通**準同型**と呼ばれる．) 重要なのは，ϕ が群の間の**全単射**でもある場合である[11]．この

---

[9] この構成において，$\mathbb{R}^N$ のベクトル空間としての構造は表に出ない．ただ，$\mathbb{R}^N$ の元が N 個の実数の集まり $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ であるということしか用いられていない．

[10] f が X から Y への写像であることを通常 $f : X \to Y$ と書く．元 $x \in X$ が f によって元 $y \in Y$ に写像されることを $x \mapsto y$ と書く．

[11] 一般に，写像 f が集合 X から集合 Y への**全単射**であるとは，写像が **1 対 1** (つまり $f(x_1) = f(x_2)$ が $x_1 = x_2$ を意味すること) であり，さらに**上への写像（全射）** (つまり任意の $y \in Y$ に対して，$y = f(x)$ を満たす $x \in X$ が存在すること．) でもあることである．このように全単射は X と Y のすべての要素に双方向から 1 対 1 の対

ときこれらの群はお互いに**同型**であると言い，抽象的な群としての同じ構造をそれぞれに具現するのである．例えば，写像 $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ および $-1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ は，以前述べた群 $\mathbf{Z}_2$ の2つの例の同型を与える．

ベクトル空間の話では，射は線形写像と呼ばれる．はっきり述べると，

定義 2つのベクトル空間 V_1 と V_2 の間の**線形写像**とは，以下の意味でベクトル空間の構造と整合的な写像 $L : V_1 \to V_2$ である：任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ と $\vec{u}, \vec{v} \in V_1$ に対して，

$$L(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha L(\vec{u}) + \beta L(\vec{v}). \tag{2.26}$$

写像が**反線形**であるとは，すべての複素数 α, β と V_1 のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対して，

$$L(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha^* L(\vec{u}) + \beta^* L(\vec{v}) \tag{2.27}$$

であることである．

線形写像 $L : V_1 \to V_2$ が全単射であれば，L は V_1 と V_2 の間の**同型写像**であると言う．そして，V_1 と V_2 は**同型**であると言い，$V_1 \simeq V_2$ と書く．これは重要な概念である．—群の場合のように— お互いに同型な空間は，具体的な集合としては異なっていても，ベクトル空間**として**全く同一とみなせるのである．

例として，ベクトル空間 $\mathbf{C}^4$ と $M(2, \mathbf{C})$ の間の同型は次の写像で与えられる．

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

明らかに，これは $\mathbf{C}^{N^2}$ と $M(N, \mathbf{C})$ の間の同型に一般化できる．

解説

1. 以下のことはすぐ証明できて有用である．

応付けをする．全単射は，f^{-1} と書かれる一意的な**逆**写像を持ち，これは Y から X の上への写像で，$y \in Y$ を，$y = f(x)$ を満たす $x \in X$ に (一意的に) 対応させる．

- $V_1 \simeq V_2$ なら $V_2 \simeq V_1$.
- $V_1 \simeq V_2$ かつ $V_2 \simeq V_3$ なら，$V_1 \simeq V_3$.

2. すべての線形写像の集合 $L : V_1 \to V_2$ は，それ自身がベクトル空間である．2 つの写像 L_1 と L_2 の和は，任意の $v \in V_1$ に対して，

$$(L_1 + L_2)(v) := L_1(v) + L_2(v) \tag{2.29}$$

で定義され，L が V_1 から V_2 への線形写像なら，積は線形写像として，任意の $v \in V_1$，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，

$$(\lambda L)(v) := \lambda L(v) \tag{2.30}$$

で定義される．

2 番目の空間 V_2 が単に複素数 $\mathbb{C}$ である場合を考えよう．複素ベクトル空間 V から $\mathbb{C}$ へのすべての線形写像のベクトル空間を V の**双対**と言い，V^* と書く．

2.3.4 ベクトル空間の部分空間

この節最後の話題として，ベクトル空間 V の線形部分空間 W を議論しよう．定義は直観的に明らかであるが，V の**線形部分空間**$W \subset V$ とは，和とスカラー積に関して「閉じた」部分空間のことである．つまり，W に属する 2 つのベクトル $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ の任意の線形結合 $\alpha\vec{w_1} + \beta\vec{w_2}$ がまた W に属するような部分空間 W のことである．

例

1. $\mathbb{C}^N$ については，その中の $(a_1, a_2, \ldots, a_M, 0, 0, \ldots, 0)$（ただし $M < N$）の形をした N 個の複素数の組からなる集合は，$\mathbb{C}^N$ の線形部分空間をなす．そしてこれはベクトル空間 $\mathbb{C}^M$ と同型である．

同様に，有限の N に対する $\mathbb{C}^N$ は，ベクトル空間 $\mathbb{C}^\infty$（無限個の複素数の組からなる集合）の線形部分空間とみなせる．

2. $\mathbb{C}^\infty$ の重要な線形部分空間 ℓ^2 は，複素数の組 $(a_1, a_2, \dots)$ のうち **2乗和**

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \tag{2.31}$$

が存在する組すべての集合である．

3. $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ の重要な線形部分空間 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ は，すべての2乗可積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x^1, x^2, \dots, x^n)|^2 \, dx^1 \, dx^2 \, \dots dx^n \ < \infty \tag{2.32}$$

な関数 ψ の集合である．これは n 次元空間を運動する非相対論的粒子の量子状態の空間である．

V の2つの線形部分空間 W_1 と W_2 の，集合論で言う交わり $W_1 \bigcap W_2$ はまた線形部分空間である．実際これは，W_1 と W_2 両方に含まれる，V の最大の線形部分空間である．

一方，併合 $W_1 \bigcup W_2$ は，ベクトルの和について閉じていないので，線形部分空間では**ない**．しかし少し修正して，$W_1 + W_2$ を，W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの任意の線形結合の集合 ($W_1 \bigcup W_2$ で**張られた**部分空間 (linear span)) と定義すると，これは線形部分空間になる．実際これは，W_1 と W_2 両方を含む，V の最小の線形部分空間である．これら線形部分空間の構成は，量子論理の視点から量子論の解釈を議論するときに重要になる．

2.4　基底ベクトル

2.4.1　重要な定義

初等ベクトル解析においては，基底ベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ を導入し，$\{v_x, v_y, v_z\}$ を実数係数として，任意のベクトル $\mathbf{v}$ を $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ と展開することはいろいろな場面で便利であった．この展開を一般の（複素）ベクトル空間へ拡張することは大変重要である．特に量子論においては，波動関数 ψ を $\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\, u_i(x)$ のように展開することは，関数のベクトル空間に属する基底ベクトル $u_1, u_2, \ldots$ を用いてベクトルを展開しているとみなせる．鍵となる定義は：

定義

1. ベクトルの組 $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_N}\}$, $N < \infty$ が**線形従属** であるとは，0 ばかりではない数の組 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ があって

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \vec{u_i} = \vec{0}. \tag{2.33}$$

を満たすことである．そのような組がなければ，(つまり，全係数 α_i が 0 でなければ式 (2.33) が実現しないとき) ベクトルの組は**線形独立**であると言う． このことは，ベクトルの組の中のどの 1 つも，他の線形結合では書けないということと同等である．

2. 無限個のベクトルの組が**線形独立**であるとは，その任意の有限個の部分集合が線形独立であることである．

3. ベクトル空間が N **次元**(ただし $N < \infty$) であるとは， それが N 個の線形独立なベクトルを含み，かつ，$N+1$ 個の線形独立なベクトルは含まないことである．

ベクトル空間が**無限次元**であるとは，その空間が任意の正の整数 N に対して N 個の線形独立なベクトルを含むことである．

4. 有限 N 次元ベクトル空間に属する N 個の線形独立なベクトルの組をそのベクトル空間の**基底**と言う．

例

1. 任意の $N<\infty$ に対して，ベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ は N 次元である．

2. ベクトル空間 $\mathbb{C}^\infty$，ℓ^2，$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ はすべて無限次元である．

2.4.2　展開定理

一般に，ベクトル空間 V のいくつかのベクトルからなる集合 S に対して，S で**張られた**空間 $[S]$ とは，有限個の S の要素から作られる線形結合全体の集合である．明らかに $[S]$ は V の部分線形空間である．

基底 $S=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_N}\}$ の本領は $[S]=V$ という性質にある．つまり，任意の $\vec{v}\in V$ は基底ベクトルで展開できるのである．このことを見るために，$\{\vec{v},\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_N}\}$ は $N+1$ 個のベクトルなので線形従属であることに着目しよう．従って0ばかりではない複素数の組 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{N+1}$ があって，

$$\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\cdots+\alpha_N\vec{e_N}+\alpha_{N+1}\vec{v}=\vec{0}. \tag{2.34}$$

を満たす．ここでもし仮に $\alpha_{N+1}=0$ であったとしよう．すると，式 (2.34) は

$$\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\cdots+\alpha_N\vec{e_N}=\vec{0} \tag{2.35}$$

となるが，係数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ のうち少なくとも1個は0ではないはずである．しかし，これは $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_N}\}$ が線形独立であることに矛盾する．従って，$\alpha_{N+1}=0$ ではありえない：$\alpha_{N+1}\neq 0$．このように式 (2.34) は $\vec{v}$ について解けて，$\vec{v}=-\alpha_{N+1}^{-1}\sum_{i=1}^N\alpha_i\vec{e_i}$ となる．これが求めていた展開である．

一般の展開

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^N v_i\vec{e_i} \tag{2.36}$$

において，複素数 $\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ を $\vec{v}$ のその基底に対する**展開係数**(あるいは **成分**) と言う．この展開係数は唯一である．というのは，もし他の

展開係数 $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_N\}$ も可能だった

$$\sum_{i=1}^{N} v_i \vec{e_i} = \sum_{i=1}^{N} v'_i \vec{e_i} \tag{2.37}$$

とすると，

$$\sum_{i=1}^{N} (v_i - v'_i)\vec{e_i} = \vec{0} \tag{2.38}$$

であり，$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_N}\}$ が線形独立なベクトルだったので，すべての $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して $v_i = v'_i$ であるからである．

有限 N 次元の「抽象」ベクトル空間は唯一である．つまり，任意の N 次元空間 V_1 と V_2 は必然的にお互いに同型である．これを見るためには，どんな N 次元ベクトル空間 V も $\mathbb{C}^N$ と同型であることを示せば十分である．$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_N}\}$ が V の基底なら，写像 $i : V \to \mathbb{C}^N$ を $i(\vec{v}) := (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ によって定義しよう．これが同型写像であることを証明するのは易しい [練習問題]．だから，$V_1 \simeq \mathbb{C}^N$ および $V_2 \simeq \mathbb{C}^N$ なので，$V_1 \simeq V_2$ となる．

例

1. ベクトル解析でよく使われる $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ は実 3 次元空間の基底である．他の基底として $\{\mathbf{i}+\mathbf{j},\ \mathbf{j}-\mathbf{k},\ \mathbf{i}+\mathbf{j}-16\mathbf{k}\}$ も可能である．

2. $\mathbb{C}^2$ の明らかな基底は $\vec{e_1} := \binom{1}{0}$ と $\vec{e_2} := \binom{0}{1}$ である．任意のベクトル $\binom{a}{b}$ はこの基底によって $\binom{a}{b} = a\binom{1}{0} + b\binom{0}{1} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$ と展開される．

他に，$\vec{f_1} := \binom{1}{1}$ と $\vec{f_2} := \binom{1}{-1}$ という基底も可能で，一般のベクトル $\binom{a}{b}$ は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(a+b)}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(a-b)}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

と展開される．

3. もっと一般に，$\mathbb{C}^N$ の自然な基底は

$$\vec{e_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ \vec{e_N} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

である．

初等的な波動力学で習ったとおり，波動関数は自己共役作用素の固有関数を用いて

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\, u_i(x) \tag{2.41}$$

のように展開される．先に述べたとおりこの式 (2.41) を，ベクトルの基底での展開を無限次元に拡張したものとみなしてもよさそうである．これは実際可能だが，式 (2.41) に現れる無限和の意味をはっきりさせておかなければならない．これは次の節の最後で簡単に議論しよう．

2.5　スカラー積

2.5.1　概念の発端

標準的な波動力学での確率解釈において重要なのは，$\psi, \phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ に対して次のように定義される重なり積分である：

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\phi(x)\, dx. \tag{2.42}$$

一般の量子論の数学的枠組みを展開するにあたって，一般のベクトル空間に属する状態に対して，上の重なり積分の一般化を見出すことが肝要である．まず，2 つのベクトル $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ のスカラー積 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を一般化することが必要である．ここで，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が作る角度の余弦に比例するので，確率を決めるときに $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を用いることは，2.1 章で述べた量子確率にピタゴラスの定理を用いる精神に合致している．

ベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ の場合には，2.2 節で $\mathbb{C}^N$ が波動力学の状態空間として現れる特別な場合からはじめた方法を踏襲できる．まず $\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\, u_i(x)$ の形の波動関数に限って議論しよう．ここで，$\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ は，縮退の無い固有値を持つ自己共役作用素の固有関数の組である．従って，状態 ψ は $\mathbb{C}^N$ の縦行列[12] $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N)^T$ と同一視される．すると，そのような 2 つのベクトル $\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\, u_i(x)$ と $\phi(x) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j\, u_j(x)$ に対して，

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^* u_i^*(x) \phi_j u_j(x)\, dx \tag{2.43}$$

であるが，$i \neq j$ なら固有値 a_i と a_j は異なるので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_i^*(x) u_j(x)\, dx = \delta_{ij} \tag{2.44}$$

となり，式 (2.43) は

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i^* \phi_i \tag{2.45}$$

となる．

この議論から量子状態空間が $\mathbb{C}^N$ なら，適切な重なり積分の一般化は，2 つの縦行列 $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)^T$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$ に対して，

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^{N} a_i^* b_i \tag{2.46}$$

あるいは，行列の形で

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left(a_1^*,\, a_2^*, \ldots, a_N^*\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

[12] 記述の節約のために，この縦行列を横行列の転置で書く．

であろう．これはまさに電子スピンの状態を $\mathbb{C}^2$ の要素で表現したことと符合する．

この定義式 (2.46) を，2 つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ のスカラー積

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \tag{2.48}$$

と比較すると，式 (2.48) は式 (2.46) の $n = 3$ として，しかも複素数でなく実数とする特別な場合であることがわかる．従って，以下の推測が成立しそうである：

- 波動力学でなじみのある重なり積分は，ベクトル空間 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上のスカラー積とみなしてよい．そして，
- 物理系の量子状態を表現するどんなベクトル空間においてもスカラー積が有用な道具となる．

結局これらは正しく，スカラー積こそが量子確率を議論するときに適切な数学的概念である．

2.5.2　基本的な定義

定義　複素ベクトル空間 V 上の**スカラー積** (あるいは **内積**) とは，V のベクトル $\vec{\psi}, \vec{\phi}$ に対して決まる複素数 $\langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle$ で，以下の性質を満たすものである：

$$\langle\vec{\psi}, (\alpha_1\vec{\phi_1} + \alpha_2\vec{\phi_2})\rangle = \alpha_1\langle\vec{\psi}, \vec{\phi_1}\rangle + \alpha_2\langle\vec{\psi}, \vec{\phi_2}\rangle \tag{2.49}$$

$$\langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle^* = \langle\vec{\phi}, \vec{\psi}\rangle \tag{2.50}$$

$$\langle\vec{\psi}, \vec{\psi}\rangle \geq 0. \tag{2.51}$$

ただし，$\langle\vec{\psi}, \vec{\psi}\rangle = 0$ となるのは $\vec{\psi} = \vec{0}$ であるときのみ．

解説

1. 式 (2.49) はベクトル解析での式 $\mathbf{u}\cdot(r_1\mathbf{v_1}+r_2\mathbf{v_2}) = r_1\mathbf{u}\cdot\mathbf{v_1} + r_2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v_2}$ の一般化である．同様に，式 (2.50) は $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ に対応し，式 (2.51) は，ベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{u}$ 自身とのスカラー積は，$\mathbf{u}$ が零ベクトルでない限り，常に正であることに対応している．

2. 条件式 (2.49–2.50) は

$$\langle(\alpha_1\vec{\psi}_1+\alpha_2\vec{\psi}_2),\vec{\phi}\rangle = \alpha_1^*\langle\vec{\psi}_1,\vec{\phi}\rangle + \alpha_2^*\langle\vec{\psi}_2,\vec{\phi}\rangle \tag{2.52}$$

を導く．ここで，スカラー積の「左側から」の複素数はその複素共役が現れ，右側からのものはそのまま現れることに注意しよう．ここはスカラー積を扱うとき間違いやすい点である．

3. ベクトル $\vec{\psi}\in V$ に対して，ひとつの写像 $L_{\vec{\psi}}: V\to\mathbb{C}$ が決まる：

$$L_{\vec{\psi}}(\vec{\phi}) := \langle\vec{\psi},\vec{\phi}\rangle. \tag{2.53}$$

スカラー積の定義のうち線形条件式 (2.49) は，$L_{\vec{\psi}}$ が V から $\mathbb{C}$ への**線形**写像であること，つまり**双対** ベクトル空間 V^* の元であることを言っている．このように，$\vec{\psi}\mapsto L_{\vec{\psi}}$ という対応は，V からその双対空間 V^* への自然な写像を与える．式 (2.52) によると，$\vec{\psi}\mapsto L_{\vec{\psi}}$ は V から V^* への**反線形**写像である．

ちょうどいいのでここで，理論物理の分野で広く使われている有名な『ディラック記法』を導入しよう (Dirac 1958)．ディラックは，2 つのベクトルのスカラー積を $\langle\psi|\phi\rangle$ と記し『ブラケット』と呼んだ．さらに彼は，このブラケットを『ブラ』$\langle\psi|$ と『ケット』$|\phi\rangle$ の 2 つに分割して，それぞれに独立な意味をもたせた．

このケット $|\phi\rangle$ の意味は明白である: それは単にベクトル $\vec{\phi}$ の異なる記法である．しかしブラは少し注意を要する．厳密に言えば，それはベクトル空間 V から複素数への**写像**である．従って，ブラケットは関数の形で $\langle\psi|\,(\,|\phi\rangle)$ と書いたほうが適切かもしれない．これはまさしくベクトルの複素数値関数なのである．従って，

$$\langle\psi| := L_{|\psi\rangle} \tag{2.54}$$

であり，ブラは V の**双対**空間の元なのである．ここで自然な疑問がわく．それでは，V^* (つまり V から $\mathbb{C}$ への線形写像) の元であって，V のベクトル $|\psi\rangle$ を使って $L_{|\psi\rangle}$ と書け**ない**ものはあるだろうか？有限次元のベクトル空間の場合には『無い』と言える．すべての線形写像がこの形である．一方たいていの**無限**次元ベクトル空間の場合には，このように書けないものが沢山ある．つまりケットよりブラのほうが「多い」のである． しかし，量子論で典型的に使われるヒルベルト空間の場合（以下で説明する）には，V の**任意の** 複素数値線形関数[13] はブラで書けるので，ブラの空間とケットの空間には1対1の対応関係がある．そして，$\langle\psi|\phi\rangle$ は，(i) $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ の内積であると見なしてもいいし，あるいは (ii) 双対ベクトル $\langle\psi|$ の $|\phi\rangle$ に対する値であるとみなしてもよい．

われわれは前者の解釈を主に取ろう．いずれにしても，ディラックの記法では式 (2.50) は $\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle$ となる．

例

1. 式 (2.46) はベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ 上でまさにスカラー積を定義する．これは2乗和が収束する級数の空間 ℓ^2 に一般化できる．(式 (2.31) 参照)

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i \tag{2.55}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は無限数列 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots)$ である．ここで，式 (2.55) が意味を持つためには，条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \quad \text{および} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 < \infty \tag{2.56}$$

が必要で，これは式 (2.55) の和の収束を保証する．これは，よく知られたシュバルツの不等式から示せる．シュバルツの不等式は，内積を持つベクトル空間の任意のベクトル $\vec{\psi}, \vec{\phi}$ に対して，$|\langle\vec{\psi},\vec{\phi}\rangle| \le \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle^{\frac{1}{2}}$, (ただし，等号は $\vec{\psi}$ と $\vec{\phi}$ がお互いに比例するときのみ) というものであり，この証明は 7.3 節で与えられる．

---

[13] 正確には，ある意味で**連続**複素数値線形関数．

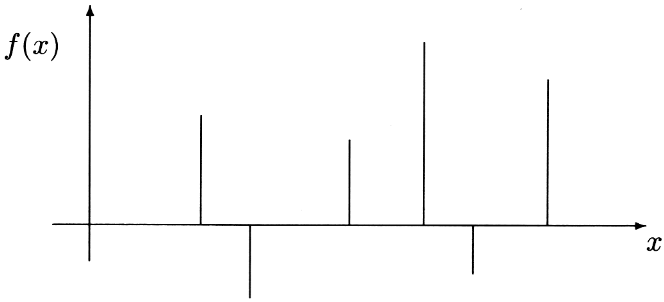


図 2.2: 幅零のスパイクからなる関数

2. ベクトル空間 $M(N,\mathbb{C})$ (式 (2.23–2.24) 参照) 上の内積 [練習問題] は $A, B \in M(N,\mathbb{C})$ に対して,

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}\,(A^\dagger B) \tag{2.57}$$

で与えられる[14].

3. 式 (2.42) は「殆ど」空間 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上の内積を定義する. さらに, 空間 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ への明白な一般化は (式 (2.32) 参照)

$$\langle\vec{\psi},\vec{\phi}\rangle := \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x^1,x^2,\ldots,x^n)^*\phi(x^1,x^2,\ldots,x^n)\,dx^1\,dx^2\,\ldots\,dx^n \tag{2.58}$$

で定義される.「殆ど」という留保は, 式 (2.51) の下の条件が厳密には正しくないからである: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = 0$ であるにもかかわらず, すべての x については $f(x)=0$ でない関数 $f(x)$ が存在するからである. 例えば, 図 2.2 は, スパイクの幅が零なら, このような関数である. ベクトル空間 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ をもっと厳密に扱うときには, このような「殆ど零」という関数だけ異なる関数を本質的に同じものとして**同一視**しなければならな

[14] tr は行列の跡 (対角成分の和) で, $A^\dagger$ は A のエルミート共役 (つまり, 任意の $i,j=1,2,\ldots,N$ に対して $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$) をあらわす.

い[15]．しかしこの微妙な点は，以下では無視していこう．

2.5.3　付随する幾何学的概念

通常の 3 次元ベクトル解析における幾何学的な概念の多くは，スカラー積の定義された任意のベクトル空間に一般化できる．特に以下の定義をしよう．

定義

1. ベクトルの**長さ** (あるいは **ノルム**) を $\|\vec{\psi}\| := \langle\vec{\psi}, \vec{\psi}\rangle^{\frac{1}{2}}$ で定義する．式 (2.51) から，零ベクトルでない限り，ベクトルのノルムは正である．
2. 2 つのベクトル $\vec{\psi}, \vec{\phi}$ が $\langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle = 0$ を満たすとき，**直交する**という．
3. ベクトルの組 $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_M\}$ が，$i, j = 1, \ldots, M$ に対して $\langle\vec{u}_i, \vec{u}_j\rangle = \delta_{ij}$ を満たすとき，**正規直交**であると言う．

例

1. 式 (2.44) は，(非退化の) 自己共役作用素の固有関数の組は，初等波動力学の状態空間 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上で正規直交化されることを言っている．無限次元空間を扱う微妙な問題を別にすれば，この固有関数の組は実際基底である．関数の「長さ」は $\|\vec{\psi}\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ である．

2. 縦ベクトルの式 (2.40) はベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ の正規直交基底である．ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ の長さは $\|\vec{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ である．

解説

1. 正規直交化された基底は，それを用いて任意のベクトルの展開係数をあからさまに計算できるので非常に有用である．実際，N 次元ベクトル

---

[15] さらに正確に言うと，この空間のベクトルは実際には関数の**同値類**である．そこでは,「殆ど零」だけ異なる 2 つの関数は同じものだと定義されるのである．

空間 V の正規直行基底を $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_N}\}$ とすると，V の任意のベクトル $\vec{\psi}$ は

$$\vec{\psi} = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \, \vec{e_i} \tag{2.59}$$

のように展開される．ここで，複素数 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ は展開係数である．式 (2.59) の両辺と特定の基底 $\vec{e_j}$ とのスカラー積を取ると，

$$\langle \vec{e_j}, \vec{\psi} \rangle = \langle \vec{e_j}, \sum_{i=1}^{N} \psi_i \vec{e_i} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \langle \vec{e_j}, \vec{e_i} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \, \delta_{ji} = \psi_j \tag{2.60}$$

となるので，展開係数は単に

$$\psi_j = \langle \vec{e_j}, \vec{\psi} \rangle \tag{2.61}$$

であることがわかり，結局ベクトル $\vec{\psi}$ の正規直行基底による展開は

$$\vec{\psi} = \sum_{i=1}^{N} \vec{e_i} \, \langle \vec{e_i}, \vec{\psi} \rangle \tag{2.62}$$

あるいは，よく知られたディラック記法では

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle \, \langle e_i|\psi\rangle \tag{2.62$'$}$$

となることがわかる．

2. 式 (2.62) は，2 つのベクトル $\vec{\phi}, \vec{\psi}$ のスカラー積をそれぞれの成分で書くのに有用である：

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\psi} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \phi_i^* \psi_i \tag{2.63}$$

あるいはディラック記法で

$$\langle \phi|\psi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|\phi\rangle^* \langle e_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle \phi|e_i\rangle \langle e_i|\psi\rangle \tag{2.63$'$}$$

である．特に，

$$\|\vec{\psi}\|^2 = \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\psi_i|^2 \tag{2.64}$$

である．

3. 式 (2.61) は，初等ベクトル解析で習ったこと，つまり $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ であれば $v_x = \mathbf{v}\cdot\mathbf{i}\ldots$，の一般化である．式 (2.63) や 式 (2.64) も同様である．

2.5.4 無限次元の展開定理

最後に，無限次元のベクトル空間に対する一般化に関していくつかコメントする．技術的には，これらの展開の右辺に現れる無限和をどのように意味付けるかが問題になる[16]．まず，複素数の場合には表式

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{2.65}$$

において，S は部分和 $S^M := \sum_{i=1}^{M} a_i$ の**極限**

$$S := \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} a_i \tag{2.66}$$

であることを思い起こそう．さらに，複素数列 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ が α に**収束**するとは，任意の正の (小さい) 実数 ϵ に対して，$n > n_0$ なら常に $|\alpha - \alpha_n| < \epsilon$ であるような (一般に ϵ に依存する) 整数 n_0 が存在することである—ということも思い起こそう．幾何学的に言い直すと，α を中心とするどんな円盤も（有限項を除いた）数列本体を「捕捉する」のである．

どんな数学の分野においても，無限和は常にこのように部分和の極限で定義される．我々の場合にはまず，V のベクトルの列 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ が極限ベ

[16] Reed & Simon (1972) には，この節で議論する内容の数学的に厳密な扱いがある．

クトル $\vec{v}$ に収束するとはどういうことかを明確にしてかからなければならない．

有限次元ベクトルの場合にはこのことは明らかである．つまり $\vec{v}_m$ の各**成分** ごとに (複素数の意味で) $\vec{v}$ の各成分に収束することである．しかし，無限次元においてはこれでは循環論法に陥る．つまり，ベクトルを基底で展開する前に収束の定義が必要なのである．

複素数の収束との類似から，V 上のノルムを利用して収束を定義するのがよい事がわかる．もっと正確に言うと，

定義　ベクトル列 $\vec{v}_m \in V$ が $\vec{v} \in V$ に**強収束**する ($\vec{v}_m \to \vec{v}$ と書く) とは，ノルム $\|\vec{v} - \vec{v}_m\|$ が実数列として 0 に収束することである．つまり，$\lim_{m\to\infty} \|\vec{v} - \vec{v}_m\| = 0$．あるいは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$n > n_0$ であれば必ず $\|\vec{v} - \vec{v}_n\| < \epsilon$ であるような (一般に ϵ に依存する)n_0 が存在することである．幾何学的に言い直すと，$\vec{v}$ を中心とするどんな球も（有限項を除いた）ベクトル列本体を「捕捉する」のである．

解説

1. この定義は，ベクトル空間 V が単に $\mathbf{C}$ であり，$\|\alpha\| = |\alpha|$ であった以前の例を特別な場合として含む．

2. $\vec{v}_m \to \vec{v}$ から，実数列 $\|\vec{v}_m\|$ が $\|\vec{v}\|$ に収束すること，つまり $\|\vec{v}\| = \lim_{m\to\infty} \|\vec{v}_m\|$ がいえる．[演習問題] 参照．

3. スカラー積の定義の重要な帰結は，それが以下の意味で**連続**であることである．すなわち，$\vec{v_m} \to \vec{v}$ であれば，すべての $\phi \in V$ に対して $\langle \vec{\phi}, \vec{v}_m \rangle$ は $\langle \vec{\phi}, \vec{v} \rangle$ に収束する．

つまり，$\langle \vec{\phi}, \vec{v} \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \vec{\phi}, \vec{v}_m \rangle$ である．

無限次元空間においては直感に反する奇妙な問題が現れるが，それは実数を有理数に限って議論するときにも現れる現象である．「あたかも」収束するかに見える有理数列 (つまり コーシー列[17]) が実際は，それ自体では有理数には収束しない例がある．例えば，任意の無理数 (π など) の小数展

[17] 複素 (実) 数列 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ が**コーシー列**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$m, n > n_0$ であれば必ず $|\alpha_n - \alpha_m| < \epsilon$ となるような整数 n_0 が存在することである．

開はこの手のものである．この場合，収束を言うためには，有理数に無理数を付加して「完備化」すればよい．

明らかに無限次元ベクトル空間での事情はもっと込み入っているが，収束するかに見える無限ベクトル列が実際にはその空間の中には極限を持たない事情は多くの例で見られる．以下の定義でもっとはっきりさせよう．

定義 ベクトル列 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ が**コーシー列**であるとは，ベクトル間の距離がいくらでも小さくなることである．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$m, n > n_0$ であれば常に $\| \vec{v}_n - \vec{v}_m \| < \epsilon$ である整数 n_0 が存在することである．

もし，任意のベクトル列 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ が $\vec{v}$ に強収束するなら，それはコーシー列であることはすぐ示せる [練習問題]．肝心なのはその逆である．つまり，どんな種類のベクトル空間において，任意のコーシー列がその空間のあるベクトルに強収束するのだろうか？

定義 スカラー積を付与したベクトル空間が**完備**であるとは，そのベクトルの任意のコーシー列が，その空間内のベクトルに強収束することである．その空間は**ヒルベルト空間**と呼ばれる．

解説

1. 有限次元ベクトル空間は完備である．

2. V が完備でないベクトル空間でもそれを拡大して，V を線形部分空間として含む，**完備な**空間 $\overline{V}$ を構成できる．この構成は，有理数から実数を構成する通常の方法とまさに同じである．

3. 完備という性質は，以前有限和で議論した展開定理が無限次元の場合でも可能であるために非常に望ましいものである．ただしそのためには，1つだけ条件があって，ベクトル空間が**可分**でなければならない．つまり，ベクトル空間の基底ベクトルが**加算無限個**である—つまり整数と同程度で，実数のように「多く」はない—という条件が必要である．

量子論の基本構成によると，系の状態はヒルベルト空間のベクトルで表現される．ほとんどの場合，応用される空間は可分であるから，以下では可分な無限次元空間を考えていこう．

可分なヒルベルト空間では，直交規格化された基底 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots\}$ によって，展開式 (2.59) は

$$\vec{\psi} = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \, \vec{e_i} \tag{2.67}$$

のようになる．右辺は部分和の強極限である．

4. 2 乗和可能なベクトル空間 ℓ^2 はヒルベルト空間である．これはハイゼンベルグが量子論を論ずるときにもともと用いた空間である．

5. 波動関数の空間 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ はそのままでは完備でない．しかし，リーマン和の極限で定義される初等的な積分の定義を，もっと洗練されたいわゆる**ルベーグ積分**で置き換えることによって完備になる．さらに,「ルベーグ測度 0」を持つ実数の部分空間を除いて，至る所で同じ 2 つの関数は同一視する必要がある．すべてこれらは，初等的な波動関数の扱いにおいては，詳細な説明なしに暗黙のうちに使われていた．この完備化されたヒルベルト空間を $L^2(\mathbb{R}^n)$ と書く．

6. 波動関数では，$L^2(\mathbb{R})$ での強収束の表式 $\vec{\psi}_m \to \vec{\psi}$ は

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x) - \psi_m(x)|^2 \, dx = 0. \tag{2.68}$$

を意味する．特に，展開式 (2.41) は

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x) - \sum_{i=1}^{M} \psi_i u_i(x)\,|^2 \, dx = 0, \tag{2.69}$$

を意味する．しかしこれは複素数 $\sum_{i=1}^{M} \psi_i u_i(x)$ がそれぞれの $x \in \mathbb{R}$ に対して $\psi(x)$ に収束することを意味**しない**！式 (2.69) の類の収束を**平均収束**と言い，フーリエ解析の古典論において重要な役割を果たす．

第 3 章　線形作用素

3.1　基本的な定義

初等波動力学では，状態は波動関数で，また観測量は自己共役な微分作用素で表現され，観測の結果得られる物理量は対応する作用素の固有値であった．先に進むにあたって，一般のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の上でこれらに対応する概念が必要である．

線形作用素の概念は直接的である．つまりそれは，定義域 (V_1) も値域 (V_2) も $\mathcal{H}$ である線形写像，式 (2.26) の特別な場合である．そして**エルミート性**の概念は $\mathcal{H}$ の内積に関連する．以下主な定義を列挙しよう．

定義

1. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の**線形作用素** (あるいは単に**作用素**)$\widehat{A}$ とは，$\mathcal{H}$ の任意のベクトル $\vec{\psi}$ に，$\widehat{A}\vec{\psi}$ と書かれる[1] ベクトルを以下のように対応させる規則である：任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ と $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\widehat{A}(\alpha\vec{\psi} + \beta\vec{\phi}) = \alpha\widehat{A}\vec{\psi} + \beta\widehat{A}\vec{\phi} \tag{3.1}$$

が成り立つ．

2. 作用素 $\widehat{A}, \widehat{B}$ の**和**$\widehat{A} + \widehat{B}$ は，任意の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$(\widehat{A} + \widehat{B})\vec{\psi} := \widehat{A}\vec{\psi} + \widehat{B}\vec{\psi} \tag{3.2}$$

---

[1] 線形作用素は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線形写像である．しかし，$\widehat{A}$ の $\vec{\psi}$ への作用を，関数の記法 $\widehat{A}(\vec{\psi})$ でなく，$\widehat{A}\vec{\psi}$ と書くのが普通である．

によって定義される.

$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ の**積** $\widehat{A}\widehat{B}$ は，任意の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$(\widehat{A}\widehat{B})\vec{\psi} := \widehat{A}\big(\widehat{B}\vec{\psi}\big) \tag{3.3}$$

によって定義される.

作用素 $\widehat{A}$ と複素数 λ の積 $\lambda\widehat{A}$ は，任意の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$(\lambda\widehat{A})\vec{\psi} := \lambda(\widehat{A}\vec{\psi}) \tag{3.4}$$

によって定義される.

3. (零でない) ベクトル $\vec{u} \in \mathcal{H}$ は,

$$\widehat{A}\vec{u} = a\vec{u} \tag{3.5}$$

であるとき，$\widehat{A}$ の**固有関数**であって，**固有値**は a である.

4. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の作用素 $\widehat{A}$ の**行列要素**とは，すべての $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対する $\langle\vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\phi}\rangle$ の総体である.

5. 作用素 $\widehat{A}$ の**共役**(あるいは**エルミート随伴**) とは，その行列要素が，任意の $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\langle\vec{\psi}, \widehat{A}^{\dagger}\vec{\phi}\rangle = \langle\widehat{A}\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle \tag{3.6}$$

の条件で決まる作用素 $\widehat{A}^{\dagger}$ である.

6. 作用素 $\widehat{A}$ は $\widehat{A} = \widehat{A}^{\dagger}$ であれば**自己共役**(あるいは**エルミート**) である．つまり，任意の $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して，$\widehat{A}$ の行列要素が

$$\langle\vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\phi}\rangle = \langle\widehat{A}\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle \tag{3.7}$$

$$= \langle\vec{\phi}, \widehat{A}\vec{\psi}\rangle^{*} \tag{3.8}$$

をみたす．波動関数に対しては，式 (3.7) は単に，2 乗可積分な ψ と ϕ に対して式 (1.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}(x)\,(\widehat{A}\phi)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{A}\psi)^{*}(x)\,\phi(x)\,dx \tag{3.9}$$

であることを言っているに過ぎない.

7. 自己共役作用素 $\widehat{A}$ が**有界**であるとは，その固有値が実数全体の有限部分空間に含まれるときである．

解説

1. $\mathcal{H}$ 上のすべての線形作用素はそれ自身が，式 (3.2) および式 (3.4) の演算に関してベクトル空間である．

2. 作用素は**同じ**固有値に対して複数の互いに線形独立な固有ベクトルを持つことがある．そうでない場合，作用素は**重複度なし**あるいは**非縮退**であると言う．$\widehat{A}$ の同じ固有値 a_m に対して $d(m)$ 個の線形独立な固有ベクトル $\vec{u}_{m1}, \vec{u}_{m2}, \ldots, \vec{u}_{m\,d(m)}$ が対応しているとき，固有値 a_m は $d(m)$ **重に縮退**していると言う．すべての $i = 1, 2, \ldots, d(m)$ に対して $\widehat{A}\vec{u}_{mi} = a_m\vec{u}_{mi}$ なので，任意の $d(m)$ 個の複素数 $c_1, c_2, \ldots, c_{d(m)}$ に対して

$$\widehat{A}\left(\sum_{i=1}^{d(m)} c_i\vec{u}_{mi}\right) = a_m\left(\sum_{i=1}^{d(m)} c_i\vec{u}_{mi}\right), \tag{3.10}$$

である．従って，固有ベクトル $\vec{u}_{m1}, \vec{u}_{m2}, \ldots, \vec{u}_{m\,d(m)}$ の任意の線形結合もまた同じ固有値を持つ固有ベクトルである．すなわち，固有値 a_m を持つ固有ベクトルは，次元 $d(m)$ の**線形空間**を作る．この空間を固有値 a_m に付随する**固有空間**という．無限次元のヒルベルト空間では，固有値は無限に縮退することがある．つまり $d(m) = \infty$．この例は以下で述べる．

非縮退作用素の例は，量子化された調和振動子のハミルトニアンである．その固有値は $\frac{1}{2}\hbar\omega, \frac{3}{2}\hbar\omega, \ldots$ (ω は角振動数) で，どれも縮退していない．

波動力学において，縮退した固有値を持つ作用素の重要な例は全角運動量である：$\widehat{L}\cdot\widehat{L} := \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2$．導入の章で述べたとおり，$\widehat{L}\cdot\widehat{L}$ の固有値は，$\ell = 0, 1, 2, \ldots$ として $\ell(\ell+1)\hbar$ の形である．固有値 $\ell(\ell+1)$ は重複度 $2\ell+1$ を持ち，付随する $(2\ell+1)$ 次元固有空間の自然な基底は，作用素 $\widehat{L}_z$ の固有関数で与えられる．この固有関数の固有値 $m\hbar$ は $-\ell\hbar$ から $\hbar$ 刻みで $\ell\hbar$ までである．

3. ディラック記法によると，行列要素 $\langle\vec{\psi},\widehat{A}\vec{\phi}\rangle$ は $\langle\psi|\,\widehat{A}\,|\phi\rangle$ と書かれる．この表式は，線形関数としての $\langle\psi|$ による $\widehat{A}\,|\phi\rangle$ への作用と解釈するのが自然である．しかし，$\widehat{A}$ が $\langle\psi|$ に「左向きに働いて」 新しいブラ $\langle\psi|\,\widehat{A}$ をつくり，さらにそれがケット $|\phi\rangle$ に作用すると見たほうがいい場合もある．式 (2.54) において，$L_{|\chi\rangle}$ に $\langle\chi|$ を対応させたように，ブラ $\langle\psi|\,\widehat{A}$ は $\mathcal{H}$ から $\mathbf{C}$ への線形写像 $L_{\widehat{A}^\dagger\,|\psi\rangle}$ である．

4. ディラック記法においては，固有状態はその作用素の固有値でラベルするのが普通である．つまり，式 (3.5) は

$$\widehat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle \tag{3.5$'$}$$

となる．ここで，$|a\rangle$ は**固有ケット**と呼ばれる．この記法は，固有値が縮退しているときはあいまいになるが，このときは，すべての異なる固有ベクトルを完全に区別する付加的なラベルを追加するものとする．

他の式もディラック記法でかけるが，式 (3.7) だけは書きにくいので，通常自己共役性は (同等な) 式 (3.8) の形で書く：

$$\langle\psi|\,\widehat{A}\,|\phi\rangle = \langle\phi|\,\widehat{A}\,|\psi\rangle^*. \tag{3.8$'$}$$

同様に，作用素の共役の定義式は

$$\langle\psi|\,\widehat{A}^\dagger\,|\phi\rangle = \langle\phi|\,\widehat{A}\,|\psi\rangle^* \tag{3.11}$$

と書ける．もし $\widehat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle$ であれば，任意の $|\psi\rangle$ に対して，

$$\langle a|\,\widehat{A}^\dagger\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,\widehat{A}\,|a\rangle^* = \langle\psi|a\rangle^* a^* = \langle a|\psi\rangle a^* \tag{3.12}$$

であるので，作用素 $\widehat{A}^\dagger$ がブラ $\langle a|$ に

$$\langle a|\,\widehat{A}^\dagger = a^*\langle a| \tag{3.13}$$

のように働くと考えても整合的である．この式はディラック記法を運用していくときしばしば便利である．この同じ式は，

$$\langle a|\,\widehat{A}^\dagger = L_{\widehat{A}\,|a\rangle} = L_{a\,|a\rangle} = a^* L_{|a\rangle} = a^*\langle a| \tag{3.14}$$

という計算でも導かれる．ここで，$L_{a\,|a\rangle} = a^* L_{|a\rangle}$ であるのは，$|\psi\rangle \mapsto L_{|\psi\rangle}$ が $\mathcal{H}$ からその双対への**反**線形写像であることによっている．

5. 式 (3.6) が実際に線形作用素を定義していることは確認を要することである．これは，どんな作用素 $\widehat{B}$ も，すべてのベクトル $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対するその行列要素 $\langle \vec{\psi}, \widehat{B}\vec{\phi} \rangle$ から唯一に決まることを前提にしている．このこと自身は，ベクトル $\vec{\psi}$ が他のすべてのベクトルとのスカラー積から唯一に決まるという事実に基づいている．無限次元のヒルベルト空間の場合には，微妙な問題が存在するが，(例えば，エルミート作用素と自己共役作用素との間には微妙な違いがある．(Reed & Simon 1972))，この問題は一応留保し，先に進もう．

6. 有限次元ベクトル空間上の作用素は有界である．しかし，無限次元空間上の非有界作用素の例は五万とある．例えば，波動力学の作用素 $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ あるいは，水素原子や調和振動子のハミルトニアンなどは，まさにそうである．

7. 波動力学の微分作用素はヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上で,「ほとんど」線形作用素である.「ほとんど」と言うのは，$-i\frac{d}{dx}$ のような作用素は $L^2(\mathbb{R})$ 上の**すべての** ベクトルに対して定義されているのではなく，微分可能なものに対してだけ定義されているからである[2]．これは，上の 5. で述べた微妙な問題と関連し，数学的には,「初等」 波動力学が実際はとても初等ではないことのほんの一つの現われである．

8. それぞれ N_1 と N_2 の有限次元を持ったベクトル空間 V_1 と V_2 に対して，線形写像 $L : V_1 \to V_2$ を考える．それぞれのベクトル空間の（必ずしも正規直交化されていない）基底を $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{N_1}\}$ と $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_{N_2}\}$ とし，V_1 の任意のベクトルを $\vec{\psi} = \sum_{i=1}^{N_1} \psi_i \vec{e}_i$ とする．すると，L は線形なので,

$$L\left(\sum_{i=1}^{N_1} \psi_i\, \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{N_1} \psi_i L(\vec{e}_i) \tag{3.15}$$

[2] もっと正確に言えば，作用素 $-i\frac{d}{dx}$ は，微分可能な関数 ψ のルベーグ同値類に対して定義されているのである．そして，記号 $-i\frac{d\psi}{dx}$ は ψ を微分して $-i$ を掛けた関数の同値類を意味する．

となる．それぞれのベクトル $L(\vec{e}_i) \in V_2$ は，V_2 の基底ベクトル $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_{N_2}\}$ の線形結合であらわされるはずである．従って，それぞれの $i = 1, 2, \ldots, N_1$ に対して

$$L(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{N_2} \vec{f}_j L_{ji} \tag{3.16}$$

となる複素数の組 L_{ji}, $j = 1, 2, \ldots, N_2$, $i = 1, 2, \ldots, N_1$ がある．

この式 (3.16) を式 (3.15) に用いると，

$$\begin{aligned} L(\vec{\psi}) &= \sum_{i=1}^{N_1} \psi_i \left(\sum_{j=1}^{N_2} \vec{f}_j L_{ji} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N_2} \left(\sum_{i=1}^{N_1} L_{ji} \psi_i \right) \vec{f}_j \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる．このように，V_1 と V_2 をそれぞれ $\mathbf{C}^{N_1}$ と $\mathbf{C}^{N_2}$ に同定すると (ベクトルとそのある基底による成分の組の間の同型を使って)，V_1 から V_2 への線型変換は

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{N_1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1N_1} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2N_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{(N_2-1)1} & L_{(N_2-1)2} & \ldots & L_{(N_2-1)N_1} \\ L_{N_21} & L_{N_22} & \ldots & L_{N_2N_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{N_1} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

というように，行列の作用として表現できる．これは，$\mathbf{C}^{N_1}$ の $N_1 \times 1$ 縦行列を $\mathbf{C}^{N_2}$ の $N_2 \times 1$ 縦行列に変換する．

9. 特に，N 次元のベクトル空間 V に働く線形作用素 $\widehat{A}$ は

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \ldots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

という行列の作用に同等で，逆に，このような行列は V 上の線形作用素に対応する．つまり，N 次元ベクトル空間上の線形作用素は，$N \times N$ 正方行列と 1 対 1 に対応する．例えば，式 (1.23) で与えられるパウリ行列は，ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ 上の作用素の行列表現である．

ただし，**実際の**作用素と行列の対応は基底の選択に依存している．従って，正方行列が特定の線形作用素と関係付くのは基底ベクトルが選択された**後**である．もっとも，はじめからベクトル空間が $\mathbb{C}^N$ であるという場合には，式 (3.19) はそのまま成立するが，これは，式 (2.40) によって与えられる $\mathbb{C}^N$ の自然な基底を選択していることに相当する．

この議論は，$n = \infty$ の無限次元ヒルベルト空間の場合に（注意を要するが）拡張される．つまり作用素は $\infty \times \infty$ の正方行列で表現される．これが，ハイゼンベルグが最初に導入した**行列力学**である．

10. 正規直交基底による作用素 $\widehat{A}$ の行列表現は

$$A_{ij} = \langle \vec{e_i}, \widehat{A}\vec{e_j} \rangle \tag{3.20}$$

あるいは，ディラック記法で

$$A_{ij} = \langle e_i | \, \widehat{A} \, | e_j \rangle \tag{3.20$'$}$$

と書ける．同様に，$\langle \vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\phi} \rangle$ は行列表示

$$\begin{aligned} \langle \vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\phi} \rangle &= \sum_{i,j=1}^{N} \psi_i^* A_{ij} \phi_j \\ &= \begin{pmatrix} \psi_1^*, \psi_2^*, \ldots, \psi_N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \ldots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.21}$$

を持つ [演習問題!]．

11. ベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ 上で，固有方程式 $\widehat{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$ は行列方程式 $(\widehat{A} - \lambda\mathbb{1})\vec{u} = 0$ で表現され，これは $\det(\widehat{A} - \lambda\mathbb{1}) = 0$ の場合に限り解を持つ．

このように，$\widehat{A}$ の固有値は λ に対する N 次多項式の N 個の根である．この多項式を行列の**固有方程式**という．

12. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の組は

$$\widehat{O}_{\vec{u},\vec{v}}\,\vec{\psi} := \langle \vec{v}, \vec{\psi}\rangle\,\vec{u} \tag{3.21}$$

によって，線形作用素 $\widehat{O}_{\vec{u},\vec{v}}$ を定義する．ディラック記法ではもっと明快に，作用素 $\widehat{O}_{\vec{u},\vec{v}}$ は $|u\rangle\langle v|$ と書かれ，

$$\big(\,|u\rangle\langle v|\,\big)\,|\psi\rangle := |u\rangle\langle v|\psi\rangle \tag{3.21$'$}$$

である．特に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{\,|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_N\rangle\}$ に対して，$\big(\,|e_i\rangle\langle e_i|\,\big)\psi = |e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle$，であり，(2.62′) は

$$\widehat{\mathbb{1}} = \sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle\langle e_i| \tag{3.22}$$

と書かれる．これは，与えられた基底に対する**1 の分割**である．これに関しては，自己共役作用素のスペクトル定理の視点からすぐ後で立ち戻る．

作用素 $|u\rangle\langle v|$ は，規則 $\langle\phi|\,\big(\,|u\rangle\langle v|\,\big) := \langle\phi|u\rangle\langle v|$ によって，ブラに対する作用とみなせる．これは [演習問題!] 関係式

$$\big(\,|u\rangle\langle v|\,\big)^{\dagger} = |v\rangle\langle u| \tag{3.23}$$

と両立する．従って例えば，関係式

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle e_i|\phi\rangle^{*}\langle e_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle\phi|e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle \tag{3.24}$$

は，恒等式 $\langle\phi|\psi\rangle \equiv \langle\phi|\,\widehat{\mathbb{1}}\,|\psi\rangle$ に，単位作用素 $\widehat{\mathbb{1}}$ の式 (3.22) を用いて導出されると見てもよい．

以下の事実を証明するのは簡単な演習問題である．

1. 式 (3.20) から，作用素の共役についての，正規直交基底に対する行列表現は

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} \quad i, j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.25}$$

を満たす．自己共役作用素 $\widehat{A}$ に対して $A_{ij} = A^*_{ji}$，つまりその表現行列は通常の意味でエルミート行列である．

2. 作用素の共役は

$$(\widehat{A}\widehat{B})^\dagger = \widehat{B}^\dagger \widehat{A}^\dagger \tag{3.26}$$

$$(\lambda \widehat{A})^\dagger = \lambda^* \widehat{A}^\dagger \tag{3.27}$$

$$(\widehat{A}^\dagger)^\dagger = \widehat{A} \tag{3.28}$$

を満たす．ここで，$\lambda \in \mathbb{C}$ は任意．

3. 二つの作用素 $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ の積 $\widehat{A}\widehat{B}$ に対応する行列は，$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ にそれぞれ対応する行列の，**行列としての**積である．行列に対する通常の積の規則が，ここに由来していると考えてもいいだろう．

3.2　射影作用素

射影作用素とは，ベクトルをそのヒルベルト空間のある部分空間に射影する作用素のことである．以下に見るように，射影作用素は自己共役で，その固有値は 0 と 1 だけである．射影作用素は「二値」観測量に対応し，量子系の性質を端的に表す．例えば，射影作用素は，量子力学の概念的基礎を議論するときに中心的役割を果たす．(特に，9.2 節の量子論理に対する議論)．

定義からはじめよう：

定義

1. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の線形部分空間 W が位相的に**閉じている**とは，W の中の，任意の強収束するベクトル列 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ が決める極限ベクトル $\vec{v} \in \mathcal{H}$ がやはり W に属する事を言う． 有限次元の $\mathcal{H}$ に

対しては，任意の線形部分空間 W は閉じている．しかし，無限次元のヒルベルト空間に対してはそうではない．閉じていない線形部分空間をすぐ見出すことができる[3]．
$\mathcal{H}$ の任意の線形部分空間 W に対して，W を含む最小の閉じた線形部分空間が存在する．これを W の**閉包**といい $\overline{W}$ と書く．

2. $\mathcal{H}$ の二つの線形部分空間 W_1 と W_2 が**直交する**とは，W_1 の任意のベクトルが W_2 のすべてのベクトルと直交することをいう．$\mathcal{H}$ の線形部分空間 W に対する**直交補空間** $W^\perp$ とは，W のどのベクトルとも直交するベクトル，すべてからなる空間である[4]：

$$W^\perp := \{\vec{\psi} \in \mathcal{H} \mid \text{すべての}\vec{w} \in W \text{ に対して } \langle \vec{w}, \vec{\psi} \rangle = 0\}. \quad (3.29)$$

明らかに，W と $W^\perp$ は $\mathcal{H}$ の直交部分空間である．

$W^\perp$ が $\mathcal{H}$ の線形部分空間であることを示すのは易しい．ここでは証明しないが，$W^\perp$ は位相的に閉じている．(ただし，有限次元ではすべての線形部分空間が位相的に閉じているのだから，このことは自明．)．有限次元の $\mathcal{H}$ については，$(W^\perp)^\perp = W$ であり，無限次元の $\mathcal{H}$ については，$(W^\perp)^\perp$ は W の閉包 $\overline{W}$ であるという面白い事実がある．

この節で中心となる幾何学的概念は，$\mathcal{H}$ の位相的に閉じた部分空間 W に対して，任意のベクトル $\vec{\psi}$ が一意的に

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_W + \vec{\psi}_{W^\perp} \quad (3.30)$$

のように，W と $W^\perp$ にそれぞれ属する $\vec{\psi}_W$ と $\vec{\psi}_{W^\perp}$ の和として分解できることである．このことは直感的には図 3.1 に示しているとおりである．そのような分解が一意的であることはすぐ示せる [演習問題!]．$\vec{\psi}_W$ と $\vec{\psi}_{W^\perp}$ の精密な数学的定義は容易である．部分空間 W の任意の正規直交

---

[3] 例えば，$\mathcal{H}$ の中の正規直交基底 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots\}$ の，**有限**の線形結合すべてからなる空間がそうである．

[4] 記法 $\{x \in X \mid P(x)\}$ は，命題 $P(x)$ を満たす，X の要素 x すべてからなる集合である．

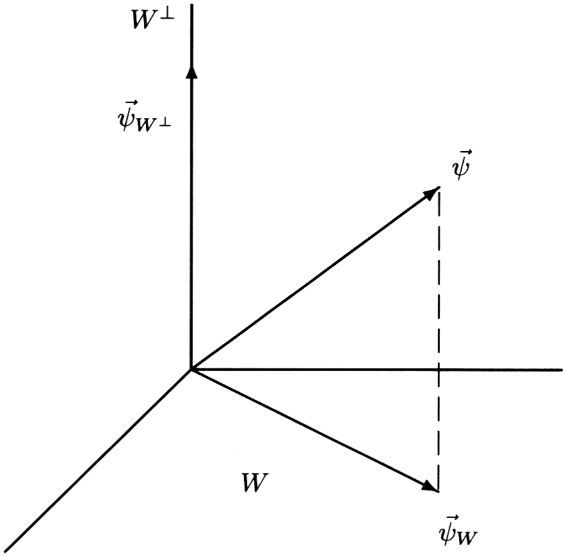


図 3.1: ベクトル $\vec{\psi}$ の分解

基底を $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots\}$ として[5]，

$$\vec{\psi}_W := \sum_i \langle \vec{f}_i, \vec{\psi} \rangle \, \vec{f}_i \tag{3.31}$$

と

$$\vec{\psi}_{W^\perp} := \vec{\psi} - \vec{\psi}_W \tag{3.32}$$

を定義する．このように定義されたベクトル $\vec{\psi}_W$ と $\vec{\psi}_{W^\perp}$ が W の正規直交基底 $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots\}$ の取り方によらないことを示すのは，簡単であるが重要である．

---

[5] 厳密に言えば，$\mathcal{H}$ が無限次元であれば，式 (3.31) の和が強収束することを示さなければならないが，我々はそのような精密さにはとらわれないで進もう．

写像 $\vec{\psi} \mapsto \vec{\psi}_W$ は明らかに線形であり，ある作用素 $\widehat{P}_W$ とみなせる．つまり

$$\widehat{P}_W \vec{\psi} := \vec{\psi}_W. \tag{3.33}$$

これを，部分空間 W の上への **射影作用素**（あるいは**射影子**）という．直交補空間 $W^{\perp}$ の上への射影作用素は $\widehat{P}_{W^{\perp}}$ であり，$\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P}_W$ に等しい．

解説

1. $\mathcal{H}$ の最も簡単な部分空間は，単位ベクトル $\vec{u}$ に任意の複素数をかけた要素からなる 1 次元空間である． この空間の上への射影作用素は $\widehat{O}_{\vec{u},\vec{u}}$ (式 (3.21) 参照) であり，ディラック記法では単に「蝶の形の作用素」$|u\rangle\langle u|$ である．

2. もし $\vec{\psi} \in W$ ならば $\widehat{P}_W \vec{\psi} = \vec{\psi}$ であり，$\vec{\psi} \in W^{\perp}$ ならば $\widehat{P}_W \vec{\psi} = 0$ である．この逆も成立し，$\vec{\psi} \in V$ が $\widehat{P}_W \vec{\psi} = \vec{\psi}$ を満たせば，$\vec{\psi}$ は必然的に W に属する．同様に，$\widehat{P}_W \vec{\psi} = 0$ ならば $\vec{\psi} \in W^{\perp}$ である．

一般に，非自明な射影作用素 $\widehat{P}_W$ は，その固有値として 1 と 0 だけしか持たない事を示すのは易しい．両固有値は (W と $W^{\perp}$ の次元が 1 より大きければ) 縮退していて，付随する固有空間はそれぞれ W と $W^{\perp}$ である．もし，W が $\mathcal{H}$ の無限次元部分空間であれば，$\widehat{P}_W$ は無限に縮退した固有値を持つ作用素のよい例である．

3. 射影作用素 $\widehat{P}_W$ は

$$\widehat{P}_W^2 = \widehat{P}_W, \tag{3.34}$$

$$\widehat{P}_W^{\dagger} = \widehat{P}_W \tag{3.35}$$

を満たす．逆に作用素 $\widehat{P}$ が

$$\widehat{P}^2 = \widehat{P}, \tag{3.36}$$

$$\widehat{P}^{\dagger} = \widehat{P} \tag{3.37}$$

を満たせば，$\widehat{P}$ は射影作用素であり，それによって $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}_{\widehat{P}} := \{\vec{\psi} \in \mathcal{H} \mid \widehat{P}\vec{\psi} = \vec{\psi}\}$ に射影される．実際，式 (3.36–3.37) は，射影作用素を代数

的に**定義**[6] するのにしばしば用いられる．

4. 射影作用素 $\widehat{P}_1$ と $\widehat{P}_2$ が**直交する**とは，$\widehat{P}_1\widehat{P}_2 = 0 = \widehat{P}_2\widehat{P}_1$ が満たされることである．これは，それらが射影する先の部分空間が直交することに他ならない．例えば，$\mathcal{H}$ の正規直交規定 $\{\,|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots\,\}$ に対して $i \neq j$ であれば，射影作用素 $|e_i\rangle\langle e_i|$ と $|e_j\rangle\langle e_j|$ は直交する．

一般に，交換する作用素は「同時観測可能な」観測量に対応している．(6.3 節参照)．従って，交換する射影作用素には，同時に主張することができる何らかの命題が対応している．

もし $\widehat{P}_1$ と $\widehat{P}_2$ が直交していれば $\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2$ も射影作用素である．実際，これは自己共役であり，$\widehat{P}_1\widehat{P}_2 = 0 = \widehat{P}_2\widehat{P}_1$ なので

$$(\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2)(\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2) = \widehat{P}_1^2 + \widehat{P}_2^2 + \widehat{P}_1\widehat{P}_2 + \widehat{P}_2\widehat{P}_1 = \widehat{P}_1 + \ P_2 \tag{3.38}$$

を満たす．

5. 与えられたベクトルを，部分空間 W のベクトルと，それと直交する部分空間 $W^\perp$ のベクトルの和として分解する手法，式 (3.30) の一般化は重要である．$\{W_1, W_2, \ldots, W_M\}$ を $\mathcal{H}$ の閉じた部分空間の組とする．(M は無限でもよい．) このとき，$\mathcal{H}$ がこれらの部分空間の**直和** であるとは，(i) それら部分空間がお互いに直交し，(ii) $\mathcal{H}$ の任意のベクトルが，その各部分空間への射影の和と等しい．つまり 任意のベクトル $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\vec{\psi} = \widehat{P}_{W_1}\vec{\psi} + \widehat{P}_{W_2}\vec{\psi} + \cdots + \widehat{P}_{W_M}\vec{\psi} \tag{3.39}$$

と書けることを言う．このとき，

$$\mathcal{H} = W_1 \bigoplus W_2 \bigoplus \cdots \bigoplus W_M, \tag{3.40}$$

あるいは $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{M} W_k$ と書く．

[6] 式 (3.36) だけで射影作用素を広く定義する場合がある．エルミート性の条件式 (3.37) はそれがさらに，**直交**射影作用素であることを言う．ここでは，射影作用素は両条件，式 (3.36) と式 (3.37) で定義しよう．

上が満たされる場合，対応する射影作用素 $\widehat{P}_{W_1}, \widehat{P}_{W_2}, \ldots, \widehat{P}_{W_M}$ はどの 2 つも直交する

$$\widehat{P}_{W_i}\widehat{P}_{W_j} = \delta_{ij}\widehat{P}_{W_i},\ i, j = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.41}$$

さらに，式 (3.39) から

$$\widehat{P}_{W_1} + \widehat{P}_{W_2} + \cdots + \widehat{P}_{W_M} = \widehat{\mathbb{1}} \tag{3.42}$$

を満たす．これを **1 の分割**という．

例えば，W が $\mathcal{H}$ の閉じた部分空間であるとき，$\mathcal{H} = W \bigoplus W^{\perp}$ であり，式 (3.42) に相当するのは等式 $\widehat{\mathbb{1}} = \widehat{P}_W + (\widehat{\mathbb{1}} - P_W)$ である．式 (3.40) のような一般化されたヒルベルト空間の分解 (および付随する式 (3.42)) は量子論の数学的構成の上で欠かせないものである．

W_i が，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_M\}$ の各要素 $\vec{e}_i$ で張られる 1 次元部分空間である特別な場合には，式 (3.39) はその基底による $\vec{\psi}$ の通常の展開に他ならない．

3.3　自己共役作用素のスペクトル理論

数学的には，自己共役作用素は波動力学において以下の理由から有用であった：(i) それらの固有値は実である．(従って，物理的な測定値を表現できる) (ii) 異なる固有値に属する固有関数はお互いに直交する．そして (iii) どのような波動関数も固有関数の線形結合で書ける．とても重要なことは，**どのような**ヒルベルト空間に対しても同様の性質があることである．

上の初等的な (i) (ii) は，以下のよく知られた定理に集約される．

定理

1. 自己共役作用素 $\widehat{A}$ の固有値は実である．
2. 異なる固有値に属する固有ベクトルはお互いに直交する．

証明

1. $\widehat{A}\vec{u} = a\vec{u}$ から，

$$\langle \widehat{A}\vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle a\vec{u}, \vec{u} \rangle = a^* \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \tag{3.43}$$

である．ここで，$\widehat{A}$ が自己共役なので，

$$\langle \widehat{A}\vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle u, \widehat{A}\vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, a\vec{u} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \tag{3.44}$$

である．はじめの式から 2 番目の式を引けば $(a - a^*)\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ となる．$\vec{u} \neq 0$ つまり，$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \neq 0$ なので，$a = a^*$ となり，a が実であることがわかる．

2. $\widehat{A}\vec{u}_1 = a_1\vec{u}_1$ および $\widehat{A}\vec{u}_2 = a_2\vec{u}_2$ とする．はじめの式と $\vec{u}_2$ のスカラー積を取ると，

$$\langle \vec{u}_2, \widehat{A}\vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{u}_2, a_1\vec{u}_1 \rangle = a_1 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle \tag{3.45}$$

となる．$\widehat{A}$ は自己共役なので，左辺は

$$\langle \widehat{A}\vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = \langle a_2\vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = a_2^* \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = a_2 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle \tag{3.46}$$

でもある．ここで，$a_2^* = a_2$ を用いた．従って，$(a_1 - a_2)\langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = 0$ であるが，$a_1 \neq a_2$ なので，

$$\langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = 0 \tag{3.47}$$

とならなければならない． **証明終り**

最後に，いわゆる「スペクトル理論」を議論しよう．量子論の構造すべてがこれを拠り所とするのである．その本質は，任意のベクトルが自己共役作用素の固有ベクトルの線形結合で展開されるという事実である．

この記述を正確にするために，縮退した固有値の概念に立ち戻ろう．a_m を $\widehat{A}$ の $d(m)$ 重に縮退した固有値で，付随する線形独立な固有ベクトルを $\vec{u}_{m1}, \vec{u}_{m2}, \ldots, \vec{u}_{m\,d(m)}$ とする．式 (3.10) の関連で議論したように，固有値 a_m を持つ固有ベクトルは，$\mathcal{H}$ の $d(m)$ 次元の線形部分空間を張る．

この固有空間のベクトルの組 $\{\vec{u}_{m1}, \vec{u}_{m2}, \ldots, \vec{u}_{m\,d(m)}\}$ は常に正規直交するように**選べる**ことは明らかである．従って，

$$\langle \vec{u}_{mi}, \vec{u}_{mj} \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, d(m). \tag{3.48}$$

である．$\widehat{A}$ の固有値 a_m のそれぞれにベクトルをこのように選んで，全体として，$\{\vec{u}_{mi},\ m = 1, 2, \ldots, M,\ i = 1, \ldots, d(m)\}$ を得る．ここで，$a_1, a_2, \ldots, a_M$ は異なる固有値である．(無限次元の場合には M は無限であるかもしれない)．上の定理から，これらのベクトルはすべて正規直交する．

$$\langle \vec{u}_{mi}, \vec{u}_{nj} \rangle = \delta_{mn}\delta_{ij} \tag{3.49}$$

ここで，$n, m = 1, 2, \ldots, M$，$i = 1, 2, \ldots, d(m)$ そして $j = 1, 2, \ldots, d(n)$ である．

有限次元ヒルベルト空間の場合，基本となる**スペクトル定理** は次のようになる．

定理

自己共役作用素 $\widehat{A}$ のすべての固有ベクトルの組は $\mathcal{H}$ の正規直交基底である．従って，上の記法で，任意のベクトル $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ は

$$\boxed{\vec{\psi} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{d(m)} \psi_{mj} \vec{u}_{mj}} \tag{3.50}$$

のように展開できる．ここで，展開係数 $\psi_{mj} \in \mathbf{C}$ は

$$\psi_{mj} = \langle \vec{u}_{mj}, \vec{\psi} \rangle \tag{3.51}$$

によってあからさまに与えられる．

解説

1. これは線形代数のよく知られた結果であるが，これをここで証明しようとすると大きく話がそれてしまう．無限次元のヒルベルト空間の場合にはもっと込み入っているが，大雑把に言ってこの定理は，離散的な

実の固有値を持つような「性質の良い」 自己共役作用素に対して成立する．よい例は，単純な調和振動子のハミルトニアンであり，その固有値は $n = 0, 1, 2, \ldots$ として，$(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ である．

2. 量子論では，**連続** スペクトルを持つ作用素も登場する: 例えば運動量作用素 $-i\frac{d}{dx}$ はあらゆる実数 k に対して固有関数 $u_k(x) := e^{ikx}$ がある．このことから，スペクトル定理の記述の中の和は積分で置き換えられるべきであろう．これについては，6.2 節で簡単に議論する．ただし厳密に言えば，これら「固有ベクトル」 は適切なヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ の**中** には無く，発散するノルムを持つのである．この性質は連続スペクトルを持つ作用素に特有なものであり，無限自由度を扱おうとする場合，さらに他にも問題が発生する例がある．幸運にも，我々の目的のためにはほとんどの場合，そのような作用素を扱わなくて済む．

3. ディラック記法では，基本的な展開定理は

$$|\psi\rangle = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{d(m)} \langle a_m, j|\psi\rangle \, |a_m, j\rangle \tag{3.52}$$

となる．ここでは，

$$\widehat{\mathbb{1}} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{d(m)} |a_m, j\rangle\langle a_m, j| \tag{3.53}$$

が付随する 1 の分割である．作用素 $\widehat{A}$ 自身が次のように書けることは重要である．[演習問題!]

$$\widehat{A} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{d(m)} a_m \, |a_m, j\rangle\langle a_m, j| \tag{3.54}$$

これを，$\widehat{A}$ の**スペクトル表現** という．

4. 作用素

$$\widehat{P}_m := \sum_{j=1}^{d(m)} |a_m, j\rangle\langle a_m, j| \tag{3.55}$$

は，$\widehat{A}$ の固有値 a_m の部分空間への射影作用素であり，これを**スペクトル射影子**と呼ぶ．固有値を強調するときには，作用素 $\widehat{P}_m$ を $\widehat{P}_{A=a_m}$ と書く．この射影子は，固有空間を張る直交基底 $\{\, |a_m, 1\rangle, |a_m, 2\rangle, \ldots, |a_m, d(m)\rangle\}$ の選択に依らない．

射影子 $\widehat{P}_m$ はお互いに直交する：

$$\widehat{P}_m \widehat{P}_n = \delta_{mn} \widehat{P}_m. \tag{3.56}$$

そして，式 (3.52) の基本展開定理は

$$|\psi\rangle = \sum_{m=1}^{M} \widehat{P}_m \, |\psi\rangle \tag{3.57}$$

のように書ける．これは 1 の分割

$$\widehat{\mathbb{1}} = \sum_{m=1}^{M} \widehat{P}_m \tag{3.58}$$

に対応している．以上のことは，$\mathcal{H}$ が固有空間 $\mathcal{H}_{\widehat{P}_1}, \mathcal{H}_{\widehat{P}_2}, \ldots, \mathcal{H}_{\widehat{P}_M}$ の直和であることを示している．式 (3.57–3.58) はその表現が固有空間の基底の選択には依らないことをはっきり示している．

スペクトル表現の式 (3.54) はスペクトル射影子を用いて

$$\boxed{\widehat{A} = \sum_{m=1}^{M} a_m \, \widehat{P}_m} \tag{3.59}$$

と書ける．この結果は，現代量子論における数学的構造のひとつの礎である．以下しばしばここに立ち戻るだろう．

5. 実数のある部分空間 Δ に対して，固有値が $\Delta \subset \mathbb{R}$ にあるすべての固有ベクトルの張る部分空間への射影子 $\widehat{P}_{A\in\Delta}$ が何であるか考えてみよう．直交条件式 (3.56) から，それは，

$$\widehat{P}_{A\in\Delta} = \sum_{a\in\Delta} \widehat{P}_{A=a} \tag{3.60}$$

である事を見るのは易しい．この表式は量子論を一般的に解析するときに有用である．

6. 以前強調したように，ベクトル空間上の与えられた作用素 $\widehat{A}$ は，作用素から行列を構成するときに用いる基底ベクトルの選択に対応して，たくさんの行列表現を持つ．自己共役作用素に対して特に有用なのは，その固有ベクトルの組である．例えば，作用素 $\widehat{A}$ の縮退が無ければ，基底 $\{\,|a_1\rangle,\,|a_2\rangle,\ldots,\,|a_M\rangle\}$ に対する行列要素は

$$A_{ij} := \langle a_i|\,\widehat{A}\,|a_j\rangle = a_i\langle a_i|a_j\rangle = a_i\delta_{ij}. \tag{3.61}$$

であり，従って，$\widehat{A}$ は対角行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_M \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

で表現される．

そのような表現の簡単な例は，式 (1.23) のパウリ行列 σ_z である．それを式 (1.23) の形に書いた時，$\mathbf{C}^2$ の基底を σ_z の固有ベクトルの組 $\binom{1}{0}$ と $\binom{0}{1}$ に選ぶことを暗黙に仮定していたのである．

第4章　古典物理学の性質

4.1　ものとは何か？

物理学のどんな分野でも，それが探求された時代と文化の一般的な科学的背景に依存した言葉が，その体系を表現するのに使われている．その言葉の価値と有用性は「明白」とされ，更なる解析は不要だとされている．しかしながら，時代とともに新しい概念が出てきて，それらすでに確立した秩序に疑問を投げかけ，基本構成の根元的な再検討を余儀なくする．20世紀において，そのような大転換は相対論と量子論である．前者は時間空間概念の大きな再考を促し，後者は存在の概念そのものに対する大きな再考を促した．

量子論の議論で多用される「系」,「観測量」,「性質」,「物理的量」,「測定」,「状態」,「因果律」,「決定論」，などの用語は，一見したところ悪気の無い素直なものである．ところが，そのどれも，厳密に議論すると次のような科学の哲学上の深い問題がすぐ露わになる．

- 科学的に探査される客観的なもの
- 理論用語と，それによって提示されたものの位置関係
- 数学的モデルと実際の世界との関連
- 科学的記述の真偽は判定されうるか？どのようにして？
- 空間と時間の性格

- 確率の意味.

この類の問題は，前述の『素直な』用語の議論を『問題に満ちた』「実在論」,「道具論」,「操作論」,「経験論」,「還元論」などと絡む議論に導くのである．間違いなく，これらすべての用語に注意深い考察が必要である．

そのような一般的な議論は，この本の目的を大きく超えてしまう．にもかかわらず，量子論の革命的な本質を十分にとらえるために，少しばかり議論する必要がある．古典物理学においては,「素直な」用語に対する説明は,「常識」に訴えることによりなされて，それらの意味は，明白なものとされ論争を引き起こすものではなかった．しかし量子論においては状況は大きく変わり，これら基本概念すべてに対する意味の変化は，以前とは全く異なる現実の視点へと導く．これら根元的な変化を理解する一助として，古典物理学の概念的状況からはじめるのがいいだろう．特にここでの関心は，物理系を記述する特定の数学的道具が，現実の世界に対する確固とした概念的視点をどのように記述するのかという点である．

まず，**系**という用語からはじめよう．それは，単に調べようとする性質—典型的には，エネルギー・電荷などの物理量など—をもつ研究対象を意味する．しかしここで,「対象」とは何だろうか? そして「性質」とは? あるいは「物理的性質」とは? これら用語の意味はそんなに自明だろうか? ここで我々は，見かけ上の素朴さがまったく当てにならない次の問題に直面している．

「もの」とは何だろう?

この壮大な問題は2500年前に西洋哲学を立ち上げた．そしてこの問題は，相補的な問題『我々の，ものに対する**知識**の本質は何か?』とともに，現代まで我々を悩まし続ける．

問題はもちろん自明でない．少なくとも,「猫」とは何か，とか「理論物理学者」，あるいは「素敵な紅茶茶碗」とは何かというような問題とは違う．それらには，対象を特徴付ける一連の性質を列挙して答えようとするだろう（それもしつこく難しいが)．しかし,『ものとは何か?』という問題は，そのように解されるべきではない．他のものから区別するそれ特有

の性質を聞いているのではなく，そのものの普遍的本質を聞いているのである．それはハイデガーが[1]「もののものらしさ」と言ったようなものである．特に，この問題は『ものとは ... である』という形の答えを許さない．なぜなら,「である」ということ自体が問題の一部なのだから.『ものとは何か?』という問いは，もっと大きな問題『「である」とは何を意味するのか?』という問題に発展する．物理の文脈でこの問題を考えると，科学探求一般に対して，特に現実世界の数学的記述の役割とその正当性に関して，これは必然的に操作論と実在論との間に大論争を巻き起こすだろう．

現代物理学の中で，ただ量子論だけが存在の問題に直面しているというのは際立っている．しかし実際に科学のどの分野でも，この問題から完全に逃れることはできない．実際この問題は，科学的であろうが無かろうが，現実の本質をつかもうとする**どんな** 試みに対しても存在する．不幸にして大概の人がこれを問題にしようとしないし，問題が存在することすら認識しない．つまり，問われることの無い問題の答えは，現実には**先見的な**ものとして仮定され,「自明な」論理として片付けられる．物理学者 Eddington (1920) の有名な一節にある：

> 『我々は，科学が究極まで発展したところのものを発見して，心は自然から再現される．その自然は心が創造したものである．我々は未知の世界の浜で不思議な足跡を見つけた．我々はその起源を説明する深遠な理論を次々と考案した．そしてとうとう我々は足跡を残した生きものを復元することに成功した．そしてなんと！それは我々自身であったのである.』

また，アルゼンチンの作家 Borges (1964) は語る：

> 『ある男が，世界を描写する仕事をしようと決意した．何年も彼は空間を，行政区，王国，山，湾，船，島々，魚，部屋，器具，星，馬，人々のイメージで満たした．彼の死の少し前

[1] 例えば，カント哲学の含みを強く持った Heidegger (1967) の著作を参照.

に，彼は忍耐強く描かれた曲線の迷路が彼の顔のイメージをかたちづくることを発見する.』

実際，求めている「真実」は決して明白なものではない．そして，これらの人々が強調するように，真実は往々にして現実そのものではなく，我々自身の投影を反映したものである．

この文脈において，特定の哲学的立場への傾倒には強力な感情的なバイアスがあることを忘れてはならない．量子論の解釈は，この典型例である：科学的な信念をはるかに超えて，自身の存在をかけて特定の立場を熱情的に死守する物理学者あるいは哲学者は珍しくない．

元型投影の感情的性格は，C.G. Jung の無意識の研究でしばしば強調された．例えば,「因果関係」の概念に関して，(ヒュームの初期の批評をたぶん反映して) 彼は書いている (Jung 1983)：

『幸せのもうひとつの無尽蔵な源は，因果的な天性への満足感にあると言える.』

そして，

『性的な衝動がしばしば男を怪物に変えるように，因果関係の初歩的な範疇には欠乏という特性が想定されている．それがすべてを超過さす飽くなき熱望となり，満足するために自身の命をも犠牲にさす．またそれは我々を煽り立て，人類の全ての偉業と法令を軽蔑させ，そして他人が泣いている時でさえ笑みを浮かべさす，疲れを知らない渇望なのである.』

もちろん，科学的研究法の本質は，我々が想定する特定の理論に自然を強制的に付き合わすものであると主張することもできる．しかし，ここでの問題は，科学の方法論ではなく，むしろ我々に無意識に射影されてしまっていることの問題である：我々が「実在」と呼ぶものが，発見されるものではなく，むしろ造られるものかもしれないということを認識していない

のである．量子論の意味についてヒステリックな議論を評価するとき，このことを覚えておこう．

4.2　古典物理学の状態空間

4.2.1　一般的概念

『ものとは何であるか？』に対する常識的な答えは，3つの型に絞られるだろう．第1は,「物体」である: (そのままで，または顕微鏡・望遠鏡を通して) 手近にあり，おそらく物理学が主として関心を持つ対象である．第2に，我々は状況としてのものについて語る ―『どんな具合ですか？(＝どのように，ものはあなたとあるか？)』と尋ね,『今はうまくないな (＝ものは，今はうまくいっていない)』などと返答する―．そして第3に，単語「もの」の極端な使用法として,「無」ではないどんなことも意味することができる．この意味で,「憂鬱」,「美しさ」,「大学副総長」 などとともに,「数字の7」も「もの」である．以降我々は，これらのうち第一の型 ― 物体としてのもの―だけを考える．そして，この特別な場合に限って客観的実在性を考察する．

この特別な物理的な意味での「もの」(または「物理系」) とは，いったい何であろうか？古典物理学の方法は「物自体」を当然のことと思って，それに付随する，それをそれならしめる**特性**または属性に注目する．この文脈において「特性」とは，明確な物理量の明確な範囲にある値をいう．例えば，電子の質量，その電荷，その位置や速度，あるいは机の上の鉛筆の位置，その長さや方向など．

質量や電荷は**内的**物理量の例であり，その値はものの構成そのものに関わる．ところが，位置，方向，速度は，**外的**物理量であり，その値は時空の枠組みの中で物体がどのように存在するかを言っている．実際問題として古典物理学の多くは，**粒子** ― 空間的に局在する特性と関係している―の研究と，**場**― 時空連続体を滑らかに変化する特性と関係している―の

研究に分けられる[2]．後者の場合，場の特性が密接に時空構造と関わるので，内的・外的特性の区別は，より不明瞭である．

確定的な特性の担い手としての物体の概念が実在論の中心にあり，それは「常識的な」西洋哲学の主要な立場のうちの1つである．実際にこの本では,『実在論的解釈』という用語は，以下の (i) および (ii) の立場を**意味する**:(i) いつでも値を「所有した」物理量について語ることがふさわしいと考える．そして，(ii) そのような所有された値についての命題は，従来の命題論理学の道具を利用して取り扱える[3]．この文脈において，特性を帯びている物体についての認識がすでに，我々の言葉の構造そのものにエンコードされている点に注意しよう．主語-述語形式の単純な文 (例えば,『机は，幅2メートルである』) は，ものに付随する特性と,『ものは，何であるか？』という問題に対する我々の常識的な理解，を反映する．

どのようにして我々が物体の特性についての知識を持つことができるかという認識論の問題は，物理学においては**測定**の概念によって答えられる．つまり 物理量の値を決めるどんな物理的な操作も決定できて (おそらく特定の精度で) 記録できる[4]．そのような描像は，科学的な方法論の一般的な客観主観分離と調和する:他の世界からのどんな影響も排除し，理論的あるいは実験的な探求を可能にするように，自然の一部分は意識的にその全体から分離される．

古典物理学の観点から，観測者と系の分離には基本的な重要性がない．観測する系および観測される系は，どちらも一つの客観的に存在する世界の一部であり，存在論的に言えば，どちらも同等な地位を持っていて同じ物理法則によって潜在的に記述できる．同じように,「測定」や「観測量」の概念に何も特別なものは無い．観測可能量の測定が他の値ではなくあるひとつの値を生じる理由は単に，測定がなされる時，観測量がその値を**持つ**からである．このように，特性は，世界の中に存在している物体に本質

---

[2] 連続体力学は，古典物理学の1つの分科としてとらえられるかもしれない．

[3] これが実際，量子論の中で可能かどうかが重大な問題なのである．

[4] 認識論は知識の研究であり，およそ存在するものについて我々が何を知りうるかについての知識に対する研究である．相補的な概念は**存在論**で，これは存在の研究であり，およそ存在するそのものについて何が言えるかに対する研究である．

的に付随する．そして測定とは，特定の量の値を表示させる物理的な相互作用以外の何物でもない．もちろんこれは，この望ましい特性を持つ「完全な」測定が存在すると仮定しているが，そのような仮定は全く自明ではない．

上で概略を記した「もの」の性質についての一般的視点は，我々が普通どのように時間を理解するかについても決定する．我々がものの『時間的変化』と言うとき，それは，物体の内的・外的特性の部分または全体が時間に依存していることを意味する．さらに古典物理学では，これらの変化が**決定論的である**と仮定される．つまり ある時刻における物体の特性の完全な知識は，後の (または以前の) 時間に，そのものの特性を確実に予測するのに十分である．

ある観点から見れば，理論物理学者の中心課題は，物体の特性に関する意味と構造という本質的には哲学的なものを，うまく数学的構造にコード化することである．特に，その命題で利用する論理操作が，系を記述する数学的な枠組みとどのように関連しまたは整合しているか，我々は理解しなければならない．

実際は，物理量と特性の概念を，系の**状態**空間 $\mathcal{S}$ の概念に科学的にコード化する．任意の時間に，$\mathcal{S}$ の一意的な要素が系に割り当てられるとする．理論の根底にある哲学的立場はその状態が担う細かな役割の中に反映される．古典物理学の場合，状態の割当は以下の条件を満たす:

S1 任意の時刻における状態指定は，その時刻における系に関連する全ての物理量の値を決定すれば十分である[5]．

S2 任意の時刻 t_2 の状態は，より前の任意の時刻 t_1 の状態によって一意的に決定される[6]．　この**因果関係の原則**は，厳密な決定論による物理学へのアプローチである．多くの系 (例えば，ニュートン力学の点粒子や古典的な電磁場) においては，時刻 t_1 の状態 s は，後

[5] これを，より操作的に言うと: 任意の時刻での状態の指定は，その時刻の観測可能量の全ての可能な測定の数値的結果を正確に予測するのに十分である．

[6] 「カオス」運動の理論の最近の成果は，古典的決定論の視点に，重要な制限条項を持ち込んでいる．しかし，これはここでの議論に影響しない．

の時刻 $t_2 > t_1$ の状態だけでなく，より前の任意の時刻 $t_0 < t_1$ の状態（つまり，s に時間発展する時間 $t_1 - t_0$ の間の状態）も決定する．

最初の条件の数学的な表現は次のようになる：系の各々の物理量 A(例えば，この粒子の速度，位置，全体エネルギー) に対して，関数 $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ が対応して，$f_A(s)$ は状態が s であるときに A が所有する値である．

第二の条件は,「力学」写像 $T_{t_2 t_1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ の2パラメーター族の存在を意味する．つまり，時刻 t_1 の系の状態が $s \in \mathcal{S}$ ならば，ある (後の) 時刻 t_2 の状態が $T_{t_2 t_1}(s)$ である．$t_1 \leq t_2 \leq t_3$ ならば，写像 $T_{t_2 t_1}$ は,（任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して）明らかに条件

$$T_{tt} = \mathrm{id} \tag{4.1}$$

および

$$T_{t_3 t_2} T_{t_2 t_1} = T_{t_3 t_1} \tag{4.2}$$

を満たす[7]．

この文脈において意味のあるそして直接物理的な関心のある典型的な問題は『時刻 $t = t_1$ で物理量 A が値 a を持つとすると，後のある時刻 $t = t_2$ での値は何か？』である．A が値 a を持つ状態が**一意的**である時に限り，この問題に答えることができる．つまり $f_A^{-1}(\{a\}) = \{s\}$ となる $s \in \mathcal{S}$ が存在するときである[8]．この場合，時刻 t_2 の A の値は，$f_A(T_{t_2 t_1}(s))$ である．しかし，$\mathcal{S}$ の部分集合 $f_A^{-1}(\{a\})$ が複数の要素を持つ場合には，何も言えない．

以上のことは，初期値がそれぞれ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ である量の**全体** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して，問題を一般化できる．次の条件があるとき，この特性

[7] 記号「id」は，$\mathcal{S}$ からそれ自身への恒等写像を意味する．

[8] 一般に，f が集合 X から集合 Y への写像であり，W が Y の部分集合ならば，$f^{-1}(W)$ は，f によって W に写像される全ての要素からなる X の部分集合である，と定義される．つまり $f^{-1}(W) := \{x \in X \mid f(x) \in W\}$．この「集合の逆」演算は，$f$ が全単射である時にだけ存在する逆関数 $f^{-1} : Y \to X$ と混同してはならない．$\{a\}$ は一つの要素 $a \in \mathbb{R}$ からなる $\mathbb{R}$ の部分集合を示す．

全体が状態 $s \in \mathcal{S}$ を**確定する**と言う：

$$f_{A_1}^{-1}(\{a_1\}) \bigcap f_{A_2}^{-1}(\{a_2\}) \bigcap \cdots \bigcap f_{A_n}^{-1}(\{a_n\}) = \{s\} \qquad (4.3)$$

このように，一意的な状態 $s \in \mathcal{S}$ が与えられた特性を持つ場合，時刻 t_2 における量 A_i すべての値が $f_{A_i}(T_{t_2 t_1}(s))$ によって与えられる．

4.2.2 点粒子の例

状態とその数学的表現の概念を明らかにするために，質量 m の点粒子が 1 次元上を力 $F(x, \frac{dx}{dt})$ (速度に依存する項は，典型的には摩擦力を表現する) のもとで運動する系を考える．運動はニュートンの第 2 法則

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t), \frac{dx(t)}{dt}) \qquad (4.4)$$

によって記述される．ここで，$x(t)$ は時刻 t における物理量「位置」の値である．この微分方程式は 2 次であり，時刻 t_1 での x の値だけでは，以後（あるいは以前）の運動は一意に決まらない．

しかしこの 2 次の方程式は，物理量 x および運動量 p の組に対して，**1 次**方程式に書き直せる：

$$\begin{aligned} m\frac{dx(t)}{dt} &= p(t) \\ \frac{dp(t)}{dt} &= F\big(x(t), \frac{p(t)}{m}\big) \end{aligned} \qquad (4.5)$$

これは，1 次なので決定論的である．すなわち，この方程式の組の解は，ひとたびある時刻 t_1 での x および p の値を指定すれば決定する．だから，任意の時刻 t での状態が実数の組 $(x(t), p(t))$ で定義されれば，因果律は成立する．従って，この系の状態の空間は 2 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ であるとみなしていいだろう．系の履歴は，図 4.1 にあるような曲線で表されるだろう．

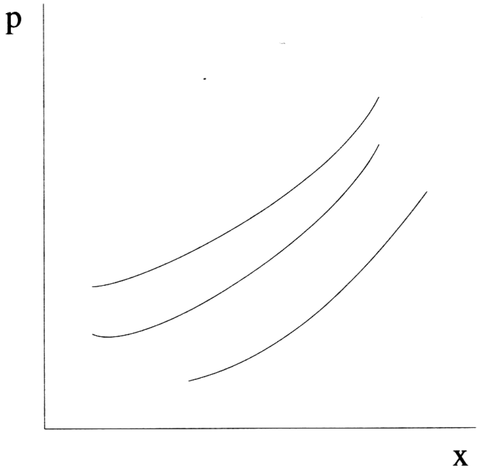


図 4.1: 状態空間での軌跡

1 次元点粒子に付随する物理量は x と p の任意関数であり，従って，状態の概念に対する最初の条件は満たされる．特に，位置と運動量はそれら自身，状態空間 $\mathbb{R}^2$ 上[9] の実数値関数 f_{pos} および f_{mom}（すべての組 $(x,p) \in \mathbb{R}^2$ に対して）

$$f_{\mathrm{pos}}(x,p) \quad := \quad x \tag{4.6}$$
$$f_{\mathrm{mom}}(x,p) \quad := \quad p \tag{4.7}$$

で表現される．

関数 f_{pos} および f_{mom} は普通それぞれ x および p と書かれるので，状態空間の**点**と状態空間の上で定義された特定の**関数**とを混同する可能性がある．これらは厳密には同一ではなく，区別しなければならない場合もある．この点と関数の混同は，f_{pos} および f_{mom} が $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ 上で (x,p) から，それぞれ第 1，第 2 成分を取り出すだけの関数であることによるのだろう．f_{pos} および f_{mom} は状態を決めること，つまりそれら 2 つの量は唯一の状態を特定することを確認しておこう．

[9] 慣例で空間 $\mathbb{R}^2$ は，系の**位相空間**とも言う．

この1次元運動はすぐに一般化できる．例えば，3次元空間の中を運動する1つの粒子の状態空間は $\mathbb{R}^6$ であり，N 個の粒子の状態空間は $\mathbb{R}^{6N}$ である．一般に通常の古典系の状態空間は偶数次元の空間 $\mathcal{S}$ であることが示せる．あらゆる場合に，物理量は $\mathcal{S}$ 上の実数値関数で表現される．ただし，$\mathcal{S}$ はベクトル空間である必要は無い．例えば，円周上のみを運動できる粒子の状態空間は2次元の円筒であり，軸方向の距離は粒子の円周を回る運動の角運動量をあらわす．

上において，質量 m は状態空間上の関数とはみなされていない．むしろそれは，力 F の関数形を通して，系自身を特徴付けるものの一部である．詳しく言えば，質量の値は「構造的」量—つまり 状態とは独立してあるもの—である．これに対して，x および p の値は，状態に (そして，特に時間にも) よるので 「依存的」量である．しかし，両方とも，系の**持つ** 性質であることには違いない．それぞれの物理系において，質量のような構造的量が存在する．それらは $\mathcal{S}$ から $\mathbb{R}$ への関数とみなすこともできるが，この関数は $\mathcal{S}$ 上では**定数**関数である．依存的量は非定数写像 $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ を定義し，系の「力学的自由度」をあらわす．

4.3　古典物理学の論理的構造

「物理量」,「性質」，あるいは 「状態空間」の概念が意味するところは，古典系に対する命題の形でうまく把握できる．ここで「命題」とは，系の性質に関する記述でその真偽が判明するものである．例えば，エネルギーが1.2 エルグと1.7 エルグの間にある，とか，粒子は中性子でなく陽子である，とか，その粒子の位置はある軸に沿って4.9 cm のところであるとか，である．このように，典型的な命題は，ある物理量 A は (ある単位で計って) 実数上のある領域 Δ にある，という形式のものである．つまり 系はこの性質を**持つ**．また複数の命題を組み合わせてさらに命題を作れる．例えば，量 A_1 と A_2 を組み合わせて使って，量 A_1 および A_2 はそれぞれ Δ_1 および Δ_2 にある，という複合命題を作れる．

系の状態空間 $\mathcal{S}$ 上で物理量 A が関数 $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ で表現されているな

らば，A の値が Δ にあるという性質に対して，部分集合[10]

$$\mathcal{S}_{A\in\Delta} := f_A^{-1}\{\Delta\} = \{s \in \mathcal{S} \mid A(s) \in \Delta\} \tag{4.8}$$

つまり，系がこの性質を持つという命題が真であるような，$\mathcal{S}$ の中のすべての状態，が対応する．

一般に，系の性質を言う**任意の** 命題 T に対して，その命題が真である状態からなる部分集合 $\mathcal{S}_T$ がある．

$\mathcal{S}$ の任意の部分集合 E は，以下のように決まる $\mathcal{S}$ 上の特別な**特性関数**を定義する．

$$\chi_E(s) := \begin{cases} 1 & \text{もし } s \in E \text{なら}, \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases} \tag{4.9}$$

任意の命題 T に対して，$\chi_{\mathcal{S}_T}$ の代わりに χ_T と書く．つまり χ_T は $\mathcal{S}$ 上の関数で，T が真なら 1，その他の場合は 0 である．特に，$\chi_{A\in\Delta}$ は命題 $A \in \Delta$ つまり，A の値が Δ にある，に対応する特性関数である．従って，$\chi_{A\in\Delta} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ は次のように定義される．

$$\chi_{A\in\Delta}(s) := \begin{cases} 1 & \text{もし } A(s) \in \Delta, \text{つまり } s \in \mathcal{S}_{A\in\Delta} \text{なら}, \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases} \tag{4.10}$$

$\mathcal{S}$ から $\mathbb{R}$ への関数という視点から見ると，命題はその値を 0 か 1 しか取らないという特別な物理量であると言うことができる．

ある意味で，$\mathcal{S}$ の**任意の** 部分集合 E は，系の状態は E にあるという，特定の命題を定義すると言える．しかし物理的視点からすると，E が持つ物理的性質を見つけない限り，これだけでは抽象的過ぎる．二つの命題 T_1 と T_2 が $\mathcal{S}$ の同一の部分集合に対応するとき[11]，つまり $\mathcal{S}_{T_1} = \mathcal{S}_{T_2}$ あるいは $\chi_{T_1} = \chi_{T_2}$ のときこれら 2 命題は**物理的に同値**であるという．

---

[10] 厳密には，$\Delta \subset \mathbb{R}$ は，実数の**ボレル**部分集合でなければならないし，関数 $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ はボレル関数でなければならない．また，ルベーグ測度零の集合だけしか違わない二つの部分空間は同一視しなければならない．これらの制限は，ある「病的な」部分空間や関数を排除するが，ここでは必要が無いので，詳細には立ち入らない．

[11] 厳密には，ルベーグ測度零の集合を除いて「同一の」．

状態空間に対する以上の数学的視点は，2.1.1 節で述べた確率に対する古典的手法に自然に整合するのである．例えば，古典統計力学は状態空間 $\mathcal{S}$ 上の一般化された体積関数を用いて，系の状態[12] が $\mathcal{S}$ の部分集合 E にある確率は E の測度で与えられる．特に，確率密度関数 ρ に対しては，量 A の値が $\Delta \subset \mathbb{R}$ にある確率は (**cf.** 式 (2.6))

$$\mathrm{Prob}(A \in \Delta; \rho) = \int \cdots \int_{\mathcal{S}_{A\in\Delta}} \rho(x^1, x^2, \ldots, x^N)\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^N \tag{4.11}$$

となる．ここで，N は空間 $\mathcal{S}$ の次元である．

一般に $\mathcal{S}$ 上の**確率測度** とは，$\mathcal{S}$ の (ボレル) 部分集合から実数への写像 μ で，以下の性質を満たすものである．

$$0 \le \mu(W) \le 1 \quad \text{すべての部分集合 } W \text{ について}, \tag{4.12}$$

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathcal{S}) = 1, \tag{4.13}$$

$$\mu(W_1 \bigcup W_2 \bigcup \cdots) = \mu(W_1) + \mu(W_2) + \cdots \tag{4.14}$$

ここで，$\emptyset$ は空集合であり，$W_1, W_2, \ldots$ は，有限あるいは可算無限個のお互いに重ならない，$\mathcal{S}$ の部分集合である．つまり，$\mu(W)$ の値は，系の状態が部分集合 $W \subset \mathcal{S}$ にある確率であると解釈できる．

物理的な命題の同値類を状態空間 $\mathcal{S}$ の部分集合に同定するという手法は命題群の論理的構造に有用である．例えば，T と U をそれぞれ，部分集合 $\mathcal{S}_T$ と $\mathcal{S}_U$ に対応する，命題の同値類であるとしよう．すると，

1. 命題 $T \wedge U$（の同値類）(「T **かつ** U」あるいは T と U との**合接**（**論理積** conjunction ））は集合論の意味での共通部分（積集合）$\mathcal{S}_T \bigcap \mathcal{S}_U$ であらわされる．つまり $\mathcal{S}_{T\wedge U} = \mathcal{S}_T \bigcap \mathcal{S}_U$ である．付随する特性関数は

$$\chi_{T\wedge U} = \chi_T \chi_U \tag{4.15}$$

を満たす．これは，$\chi_T(s) = 1$ かつ $\chi_U(s) = 1$ の場合は $\chi_T(s)\chi_U(s) = 1$ であり，その他の場合は $\chi_T(s)\chi_U(s) = 0$ となるからである．

[12] 古典統計力学では，$\mathcal{S}$ の各要素は**微視的状態**と呼ばれる．

2. 命題 $T \vee U$（「T **または** U」あるいは T と U の**離接**（**論理和** *disjunction*））は合併（和集合）$\mathcal{S}_T \bigcup \mathcal{S}_U$ であらわされる．つまり $\mathcal{S}_{T \vee U} = \mathcal{S}_T \bigcup \mathcal{S}_U$ である．付随する特性関数は

$$\chi_{T \vee U} = \chi_T + \chi_U - \chi_T \chi_U \tag{4.16}$$

を満たす．これは，$\chi_T(s) = 0$ かつ $\chi_U(s) = 0$ の場合は $\chi_T(s) + \chi_U(s) - \chi_T(s)\chi_U(s) = 0$ であり，その他の場合は $\chi_T(s) + \chi_U(s) - \chi_T(s)\chi_U(s) = 1$ だからである．

3. 命題　$\neg T$（「**非** T」）は集合論の意味での補集合 $\mathcal{S} - \mathcal{S}_T := \{s \in \mathcal{S} \mid s \notin \mathcal{S}_T\}$ であらわされる．つまり $\mathcal{S}_{\neg T} = \mathcal{S} - \mathcal{S}_T$ である．付随する特性関数は

$$\chi_{\neg T} = 1 - \chi_T. \tag{4.17}$$

を満たす．

もうひとつ重要な概念は「論理的含意」である．命題の同値類 T が命題の同値類 U を**含意する** とは，T が真であるすべての状態に対して U も真であることを言う．これは集合論の言葉では，$\mathcal{S}_T$ が $\mathcal{S}_U$ の部分集合[13] であること，あるいは同じことだが，$\chi_T \leq \chi_U$，つまり すべての $s \in \mathcal{S}$ に対して，$\chi_T(s) \leq \chi_U(s)$ であることである．以上の命題の同値類に対する関係を $T \preceq U$ と書く．そしてそれは，以下の**半順序**の条件を満たす．

1. すべての命題 T に対して $T \preceq T$ である．

2. 任意の 3 つの命題 T，U と V に対して，$T \preceq U$ かつ $U \preceq V$ なら $T \preceq V$ である．

3. T と U が $T \preceq U$ かつ $U \preceq T$ なら，$T = U$ である．

常に偽である命題 $\emptyset$ は空集合に対応し，常に真である命題 I は全空間 $\mathcal{S}$ に対応する．従って，任意の命題の同値類 T に対して $\emptyset \preceq T \preceq I$ である．

---

[13] いつもの注意だが，ルベーグ測度零の集合を除く．

命題の同値類全体は，これらの演算 $\wedge$ と $\vee$ に関して**ブール代数**をなしていることは重要である．特に，命題の論理関係は以下の**分配則**を満たす：任意の命題 T，U そして V に対して，

$$T \wedge (U \vee V) = (T \wedge U) \vee (T \wedge V), \tag{4.18}$$

$$T \vee (U \wedge V) = (T \vee U) \wedge (T \vee V). \tag{4.19}$$

これらは，ベン図を描けばすぐ理解できる．[演習問題].

きわめて重大なことは，このように命題に $\mathcal{S}$ の部分集合を対応させることによって，系の物理的特性についての**命題** はまさに，$\mathcal{S}$ の**部分集合**全体の上のブール代数と同定することができる，ということである．このように，通常の論理的思考 (つまり ブール論理) は，古典物理学の数学的構造の中に実現されているのである．

4.4　量子論に向けて

以上の一般的描像は常識と整合するように見えるかもしれないけれども，量子論の出現によって，あらゆる面で考え直さなければならなくなった．

例えば，実用的なごく通常の量子論では，着目系と観測者 (あるいは観測機器) とは明確に区別される．量子論では**測定**ということに主眼が置かれ，理論はその測定の結果の確率的分布を予測するものであると見なされる．

この道具論的な視点を発展させると，すべての物理的特性の値を持った物理系が存在するという考え方は無意味であるという，反実在論の解釈に行き着く．この視点からは，観測が特定の結果を与えると考えるのは正しく**ない**．系はたまたまその時に，その物理的値を与えただけだからである．少なくとも量子論を単独の物体に適用するなら，(そして，反実在論にとっては議論の余地もあるが),「もの」は，ただ観測によってのみ[14] (古

[14] これらは，常に「実在」である「構造的」性質に対しては当てはまらない．

典物理学の意味で) 発現する，まだ**表面化していない，潜在的な**性質の総体 (bundle)，として明晰に理解できるようになった．以下に見ていくように,「性質」に対する古典的概念のこの不適合は，数学的には，量子命題の**非**分配的特質に反映されている．

状態の概念は量子論においても重要な役割を果たすが，通常のアプローチでは最初の条件 S1 は，測定結果に対する精密な予測をする，という道具論的なものに言い換えなければならない．そしてもちろん，量子論を論じているのだから，結果そのものでなく，ある結果になる**確率**が予測されるのである．因果律を担う状態の概念は依然として存在し，特に，ある時刻の状態の指定は，他の時刻の状態の決定に (この 2 つの時間の間に測定がなされなければ) も必要である．この意味で，条件 S2 は依然として存在する．ただし，決定論的に発展するのは，物理量の実際の値でなく，測定結果に付与される確率である．

量子論の特性を完全に記述するために，以上のことはこれから注意深く説明していくが，技術的・概念的な議論の基本となる，量子論の一般的形式の明確な記述がまず必要である．

第5章　量子論の一般的な理論形式

5.1　量子論の規則

5.1.1　序論

一般的な量子論の規則は，1章で議論された波動関数を運用するための4つの規則の一般化である．その規則は，量子論が最初に定式化された1920年代以降の科学的な研究の総体を総括している．この本の残りの多くは，その規則から帰結する数学的，物理的，概念的な結果の論理的展開を述べる．しかし，これらの規則は，純粋数学における公理(例えばベクトル空間の理論)などと同様の範疇のものではない．特に，将来いつか，ある実験の結果で，それが全ての理論形式を相当に修正し，または全体を否定する，ということがあるかもしれない．

我々の最初の問題は，物理学のどんな理論でも，どのように物質界に関与するかという**何らか**の仮定なくして，その構造上の規則を記述できない，ということである．量子論のような論争的な課題で，このことは，偏った概念を抱かせずに内容をどのように提示したら良いかと言う教育上の問題を喚起する．この問題に対して私は初めに，大部分の物理学者が少なくとも暫定的に満足して受け入れられる「最小の」解釈の枠組みから出発したい．この枠組みを越える試みについては後で議論する．この最小の解釈は，以下の重要な特徴を持つ:

- 量子論とは，調整準備された，系の複数の複製に対する**測定**をした結果の，確率的分布を予測するための体系である．測定を強調する

ために,「物理量」と言う代わりに「観測可能量」あるいは「観測量」という.

- 確率は，統計的に**相対度数**と言う意味で，多数回の測定の結果に対して意味を持つ.

- 「測定」の概念または確率の相対度数解釈が，理論の**基本的な**構成要素なのか，あるいは物理学者が実際に研究するときの単に実用上の道具であるのかについては，それ以上言及しない．特に，測定がなされる前に，系が物理量の値を「所有するか」どうかについて，言及しない[1].

物理量の位置に関する問を避けているので，この最小解釈の方法は，量子論形式の完全な**解釈**とは言えない．しかしこれこそが，疑う余地なく，実際に仕事をしている多くの物理学者によってとられる見方である．この理由によって，これを量子論の**実用論の方法**と呼ぼう．多くの点で，それは「安全な」後退した立場である: 十分に満足する解釈への発展は，いろいろな方向性を持っているが，根底にある哲学は，大まかに**反実在論**か**実在論**に分類される．前者の解釈は，以下の特徴を持つ:

- 個々の物理系において，全ての物理量が値を「持っている」とか「所有している」という考えは，量子論の文脈において**不適当である**．この本で,「反実在論」と分類する解釈は，すべてこの特徴を持っている.

- 「測定」の概念は，量子論の**本来的な**枠組みが，正確に指定された方法で準備された系に対して繰り返し実行される測定の結果の確率的分布を予測するだけである，という意味で，他に還元できない基

[1] 古典物理学で,「ある物理量が，可能な**連続量**の中に正確な値を持つかどうか」という問題があり，これは量子論における問題でもある．しかし，それはここで考えている問題ではない．中心となる問題は，対応する作用素が離散的な固有値だけを持つ観測量に対して，個々の量子系が値を所有する，と言う主張が意味をなすかどうかということである．古典物理学では，値が離散集合をなす物理量に関しての問題は無い.

本的なものである[2]．(実際にボーアは，物理的な量の**概念**は，特定の測定の文脈の範囲内でのみ定義されるという認識を広めた．) このようにこの型の解釈は，科学の道具論あるいは操作論の哲学的傾向がある．

- 確率の相対度数解釈は，量子論の**基本的な**構成要素である．特に，同一に用意された系の多数回の測定の結果の分散は，何らかの客観的に存在する状況に対する「知識の不足」を反映していると解釈されてはならない．

- 上記の事に付随して，量子状態が**個々の**系を記述している，としているのではない．むしろ，それは全体だけに言及する．つまり，測定が繰り返しなされる系の複製の「アンサンブル」(集合) に対して言及するのである[3]．

上記にもかかわらず，通常「個々の」系についての記述に意味があると**仮定される**．(完全な道具論者がもしいれば反論するかもしれないが)．この意味で，ある特性 — 例えば空間的局在 — は個々の系の各々の複製について記述されうる．このように，この型の解釈は，特定の特性に関して実在論だが，大部分の特性に関して反実在論である傾向がある．そのような解釈は，何を強調するかによって,「相対度数」,「道具論」，あるいは「反実在論」として以下規定されるだろう．古典物理学の，より実在論の見方に立ち戻ろうとする解釈は，そのような解釈全体の正反対のところに位置する．このタイプの解釈は，以下のいくつかの立場で特徴付けられる:

- 量子論においても，個々の系がその物理量を所有すると考えることは**適切である**．この「適切」という意味は，このタイプの命題が，

---

[2] この種の方法の包括的な議論は，Peres (1993) 参照.

[3] 物理学者は,「アンサンブル」という用語を，測定される系の同一に用意された複製の全体を示すために使う．そして確率的結果は相対度数の意味で解釈される．歴史的に，アンサンブルの概念は古典統計物理学において主に発展した．そこでは，通常物理量が未知の値を所有している系の確率評価の見方と関係している．ただしこれは，ここで意図した意味ではない．

標準的な命題論理学を使って取り扱えるということである．このことは「実在論」として分類されるすべての解釈が有する特徴である．

- 量子論は，これらの所有される値の確率的分布を予測するための理論体系である．そしてそれは，単に測定の結果に対する理論ではない．特に「測定」の概念は，この理論で**基本的な**役割を演じない．
- 量子論での確率は，実際に起こることについての我々の**知識**の不足の反映であると解釈できる．これは，確率のいわゆる**確からしさ**（認識上の確実性）の解釈である．
- 量子状態を個々の系に割り当てることは**適切である**．一部の物理学者は，状態は**系**そのものの属性を指す，と解釈する．もう一つの見方は，状態は系についての我々の**知識**を指す，ということである．

このタイプの実在論の立場には，しばしば量子論の現在の技術的な理論形式が**不完全である**という主張がある．特に,「隠れた変数」が存在し，その値が物理的記述を完全にするという．ここで2つの対照をなしている見解がある：(i) これらの隠れた変数の値は原則として決定できて，従って我々は自然の厳密な決定論的な見方に戻ることができる．そして，(ii) 隠れた変数は根源的な統計に従って変動し，そしてこれは標準的量子論の確率的性質の基礎をなしている．極端な実在論と反実在論の間に多くの立場が存在し，それらはいろいろな視点から分類できる．分類の第1の方法は，量子状態が何に関してのものかに着目することである：

- 個々の量子系
- そのような系の特性についての我々の**知識**
- そのような系の上で行われる**測定**の結果
- 繰り返し測定が行われる，(現実に，または仮想的に) 同一に用意された系の複製の**集合**

- そのような集合の上で行われる**繰返し測定**の結果.

第2の方法としては，量子論の文脈において使われる「確率」の正確な意味に着目することである.

第3の方法は，個々の系が，典型的量子状態において，ある属性をどの程度**備えている**か，いないかという視点であり，我々はこれを採用する．この視点の重要性は，一連の論文 (Margenau 1949, McKnight 1952, Margenau 1963*a*, Margenau 1963*b*, Margenau 1963*c*, Park & Margenau 1968, Park 1968*a*, Park 1968*b*) で Margenau と彼の同僚によって強調された．それはまた，Redhead (1989) の主題でもある.

例えば，最小解釈のアプローチの1つの拡張は，個々の系は値を**所有できる**のだが，これらの値は本質的に若干「不明瞭」である，というものである (Busch, Lahti & Mittelstaedt 1991)．もう一つの考えは，個々の系は物理量の**値**を所有しないのだが — カールポッパーの語を借用すれば — 値を持つ**傾向**がある (Popper 1982) のである．この考えを言い換えると，量の値は「潜在的」であるが，測定によって「顕在化する」とするものである．より実在論の見解では，特定の値を持つ傾向はそれ自体，物理系の基本的な特性と考えられる．潜在的な値についての考えは，Margenau と同僚によって広範囲に議論された.

5.1.2 規則の提示

これらいくつかの所見は多くの難しい問題を持ち出すが，我々が後に量子論の概念上の理論体系をより徹底して解明するとき，このことに立ち戻ろう．この章では以下，最小のそして実用的アプローチにおいて，量子論の主に技術的な部分を議論する．これから述べる4つの規則は，量子力学を記述する数学的な理論体系を与え，すべての量子力学系を正しく記述する[4].

[4] 量子論を展開する数学的な理論体系は他にもある．厳密な量子場の理論においてしばしば使われる有名な例は，その対象として，物理的観測量の集合上の，特定の代数

規則 *1* 測定装置との接触を除いて，孤立した系に対して行われる測定の結果の予測は，本質的に確率的である．情報の最大量が利用できる状況においては，この確率的情報は，量子論の状態空間をつくる複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトルで数学的に表現される．それが可能な最も精確な予測をする限り，このベクトルは系の「状態」の物理的概念の数学的な表現とみなされる．

規則 *2* 系の観測量はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に働く自己共役作用素として表現される．

規則 *3* 観測量 A と状態が，自己共役作用素 $\widehat{A}$ と規格化されたベクトル[5] $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ によってそれぞれ表現されるなら，A の測定で期待される結果 $\langle A \rangle_\psi$ は，

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\psi} \rangle \tag{5.1}$$

である[6]．あるいは，Dirac 表記法では，

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \, \widehat{A} \, | \psi \rangle. \tag{5.1'}$$

規則 *4* 外部の影響が何もない場合 (つまり **閉じた**系では)，状態ベクトル $\vec{\psi}_t$ は，時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d\vec{\psi}_t}{dt} = \widehat{H}\vec{\psi}_t \tag{5.2}$$

によって，時間 t に関して滑らかに変わる．ここで $\widehat{H}$ はハミルトニアンとして知られる特別な作用素である．

的構造 (C^* 代数) を考える．状態はこの代数に関して定義される．この理論体系は，主とする対象として，状態のベクトル空間及びこの空間に関して定義される観測量を採用するヒルベルト空間のアプローチとは対照的である．

[5] ベクトル $\vec{\psi}$ は，$\langle \vec{\psi}, \vec{\psi} \rangle = 1$ ならば規格化されている．

[6] 標準的確率論の表記法に従って,「平均」は，複数の測定の平均の意味に用いる．数学的な理論形式によって予測される「平均」をいうとき,「期待される結果」，あるいは現実論向きの「期待値」という用語を使うのがより適切である．

5.1.3 規則1－3についてのコメント

1. 規則1と2は，物質界の量が数学的に表現される方法を指定する**対応**の規則である．すでに強調したように，この規則は，系が所有する**特性**に関してでなく，系の上の**測定**結果のみを記述する．この「ブラックボックス」的な視点は，量子論への最小の，実用的取り組みの一面である．そして,「系の状態」に関しての問題は依然あるけれども，ここでの記述は，複数の繰り返し測定において平均的に起こることだけに関してである．

上述したように，一部の物理学者はこのことをさらに強調して状態ベクトルを，繰り返し測定される適切に用意された系の大きい**集合**に対してだけのものだと規定する．繰り返し測定の役割を強調したいときは，この本ではいつでもこの用語を使う．しかしある程度は，これは表記法の問題である．系の「状態」概念は抽象的なもので，例えば，物が特定の位置にある，などという通常の会話と同じレベルの直観的な意味は持たない．この観点から，繰り返し測定の結果の確率的予測に関してのみ記述するという了解のもとで，状態が単一の系に付帯すると考えるのも，状態を測定が行われる系の集合に付帯させるのと同等に十分意味があるだろう．

実際，仮想的な**無限の**測定列の結果を記述するということから，最初の提示が実際に好ましいと主張できるだろう．その一方で，測定が行われる系の複写達はどんな**実際の**集合でも，総数は常に**有限である**から，結果の相対度数は理論上の確率の近似なのである．また，実際の状態**準備** (下記参照) が，たいてい個々の系の上で実行される点に注意しよう．従って，道具論寄りの物理学者は，系が特定の状態にあるということは，それが特定の準備手順に依っていると主張するかもしれない．この意味で，状態を個々の系と結びつけることは全く自然である．

本当に重要な点は，古典論とは違って，量子状態の指定は，明確な値を全ての物理量に割り当てるというわけではないことである．状態を個々の系に付帯させる時の危険は，そうすることよって，個々の系の物理量が必然的に値を持つと錯覚してしまうことである．一方で状態を系の集合に付帯させる場合は，そのような間違いは無い．

我々は後に，個々の系の特性の概念に意味が**与えられる**，より実在論の方向で量子論を解釈することの可能性にたち戻る．そのような解釈においては，多分規則3を次のように変更するのが自然だろう．

> 「系の物理量 A と状態が，それぞれ自己共役作用素 $\widehat{A}$ と規格化されたベクトル $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ によって表されるとき，A の期待値 $\langle A \rangle_\psi$ は，$\langle A \rangle_\psi = \langle \vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\psi} \rangle$ である．」

つまり，『A の測定で期待される結果 $\langle A \rangle_\psi$』は，『A の期待値 $\langle A \rangle_\psi$』に変更される．

2. 繰返し測定の概念は，量子論の実用的方法で重要だが少し漠然としている．実際には，繰り返し測定は同じ系の多くの複製に関して，全て本質的に同じ時間に実行されるかもしれないし (例えば，原子準位を知るために箱の原子にレーザーをあてるとき) または，順番に測定するかもしれないし (原子線が Stern–Gerlach 装置を通過するとき) あるいは，実験はそのたびごとに適切に準備される同一の系を使って繰返されるかもしれない．しかしいずれにしても，2つの重要な問題が生じる．第一は，実験のたびに異なる相対度数が，理論的に予測される確率に対する許容内の近似であるためには，実験は何度繰返されなければならないかについてである．この問題は量子論に特有なものでなく，物理学において測定がなされるときに一般的なものである．しかし，標準的な統計解析は古典的な確率論に基づいているので，これは明らかでない．古典的な確率論は量子論において適切でないのである．この問題に対する興味深い試みがある：系の多数の複製が量子論の枠組み内で**一つの**合成系とみなされるならば，どうなるのか．この試みの狙いは，固有値が構成系の測定結果の相対度数であるこの合成系の上で「相対度数」作用素を定義することである．有名な例は，Hartle (1968) である．最近の研究は Busch et al. (1991) 参照．我々の第二の問題は，系の適切な複製が，繰り返し測定に対して「正しい状態」であることを保証する方法である．量子状態を個々の系と結びつけるのを嫌う解釈では，これは特に問題になる．状態準備の複製可能性のこの問題に対する標準的な解決は，8章で議論される．

3. $\mathcal{H}$ のすべてのベクトルが，必ずしも実際に実現する状態を表すわけではない．特に，特定の作用素の固有状態の重合せのベクトルはそうである．重要な例は，電荷やフェルミオン数である．そのような状態が存在しないことは，いわゆる**超選択則**の存在という数学的な理論形式に反映される．これには，量子論に対するもうひとつのアプローチ (C^* 代数) が特に役立つ．

4. 量子論の初期の公理化では，あらゆる自己共役作用素が物理的観測量を表すと仮定された．しかし，大部分の作用素に対して，装置が対応する観測量を測定できるとか，量子論の大部分の応用が，少数の物理的な量 (例えば位置，線形運動量，角運動量，エネルギー，　など) だけを含むというのは，想像しがたい．それに加えて，超選択則の存在は，承認しがたいベクトルの上へ射影する作用素は，物理的な観測量を表すことができないことを，強く示唆する．

5. 全ての物理的な観測量が，自明でない自己共役作用素と関係しているというわけではない．例えば，4.2 節で議論されたように，ニュートン物理学において，質量 m は構造的量である．このことは対応する量子論に反映され，m は自明でない作用素でなく，ハミルトン作用素の中のパラメータとして現れる．しかし，より洗練された量子論では，質量 m は，固有値が素粒子の質量となる作用素になることができるので，質量 m の役割は理論に依存することになる．

6. 上で議論した状態は，我々が量子系に関する最大の「情報」を持つ場合に相当する．しかし，実際問題として，このようなことは特別である．そして往々にして状態は，ある集合 $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \ldots, \vec{\psi}_D$($D$ は無限でもよい) とそれぞれの状態 $\vec{\psi}_d(d = 1, 2, \ldots, D)$ にある確率 w_d に依拠する．ここで，w_d は実数で，$0 < w_d \leq 1$，$\sum_{d=1}^{D} w_d = 1$ を満たす．ベクトル状態が持つこの不確実性は，全く古典的に解釈される．例えば，それは系を準備するのに用いられる装置の不具合から生じるかもしれない．あるいは量子系から分離できない有限温度環境によって引き起こされる避けられない熱の変動から偶発的に生じるかもしれない．総体 ($\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \ldots, \vec{\psi}_D$; $w_1, w_2, \ldots, w_D$) は系の**混合状態**と言われる．そして，我々は次の章にお

いて，全く古典的な確率 $w_1, w_2, \ldots, w_D$ と，ベクトル状態 $\vec{\psi_1}, \vec{\psi_2}, \ldots, \vec{\psi_D}$ に固有に付随する量子確率とを組み合わせるために，規則3がどのように修正されなければならないかについて論議する．

7. 式 (5.1) は，状態ベクトル $|\psi\rangle$ に，$|\mu| = 1$ なる任意の複素数 μ を掛けても，理論の物理的な予測が不変であることを意味する．

8. 量子規則は，規格化されていない状態ベクトルを使用して記述される事もある．この場合，規則3は

$$\langle A \rangle_\psi = \frac{\langle\psi|\,\widehat{A}\,|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \tag{5.3}$$

になる．

5.2 与えられた古典的な系の量子化

5.2.1 古典的な構造の保存

上の規則だけでは一般的過ぎるので，個々の系に依存する付加的な仮定を補なう必要がある．これは特に，与えられた物理的な系の**実際の**ヒルベルト空間の選択，および特定の観測量に対する作用素の同定，について必要である．

実際，1つ非常に重要なことは，特定の状態空間 $\mathcal{S}$ で**与えられた**古典的な系から「量子対応物」を造ることである．多数の純正の量子系は，このようにして得られる：調和振動子や水素原子の「量子化」，統一された電弱相互作用の量子論を造ることなど．

古典的な理論において，各々の物理量には，(ボレル) 関数 $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ が付随している．すると「量子化」は，そのような各々の関数 f に，量子状態空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $\widehat{f}$ を結びつける写像 $f \mapsto \widehat{f}$ と見なせる．例えば，一次元の点粒子の運動を記述する波動力学において，おなじみの記号 $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ を考察しよう．古典的な状態空間は全てのペア (x, p)

の集合 $\mathbb{R}^2$ であり，4.2.2 節で説明したように，f_{pos} と f_{mom} に対して式 (4.6–4.7) で定義した関数によって，位置と運動量が表される．つまり，記号 $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ はそれぞれ，$\widehat{f}_{\mathrm{pos}}$ と $\widehat{f}_{\mathrm{mom}}$ の短縮形である．

この視点の重要性は，古典的な関数 $f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ の集合 $C(\mathcal{S},\mathbb{R})$ が豊富な構造を持っていて，この一部が量子化の写像 $f\mapsto\widehat{f}$ によって保存され，量子化手順に対する価値ある示唆を与えるという可能性があることである．空間 $C(\mathcal{S},\mathbb{R})$ は，2 つの自然な数学的構造を持つ[7]．第一の自然な構造は，ベクトル値関数の任意の空間上での普通のベクトル演算式 (2.24–2.25) によって与えられる．すなわち，$f_1, f_2\in C(\mathcal{S},\mathbb{R})$ および $r_1, r_2\in\mathbb{R}$ のとき，全ての $s\in\mathcal{S}$ に対して

$$(r_1f_1+r_2f_2)(s):=r_1f_1(s)+r_2f_2(s) \tag{5.4}$$

これにより，$C(\mathcal{S},\mathbb{R})$ は実ベクトル空間になる．第二の自然な構造は，全ての $s\in\mathcal{S}$ に対して

$$(f_1f_2)(s):=f_1(s)f_2(s) \tag{5.5}$$

によって，2 つの関数 f_1, $f_2\in C(\mathcal{S},\mathbb{R})$ の**積** f_1f_2 を定義することから生じる．

我々の目的のために，これらの代数構造がいくらかでも量子化によって保存するかどうかが重要な問題である．例えば，古典的な観測量 f_1 と f_2 がそれぞれ量子論では作用素 $\widehat{f_1}$ と $\widehat{f_2}$ によって表されるならば，線形結合 $r_1f_1+r_2f_2$ は $r_1\widehat{f_1}+r_2\widehat{f_2}$ と表されるだろうか？言い換えると，量子化の演算 $f\mapsto\widehat{f}$ は，$C(\mathcal{S},\mathbb{R})$ から量子状態空間 $\mathcal{H}$ の自己共役作用素の実ベクトル空間への線形写像であるだろうか？

---

[7] 第 3 の非常に重要な構造は，$\mathcal{S}$ が通常**シンプレクティック**多様体であることである．これは関数 $f,g:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ の各々のペアに，3 番目の関数 $\{f,g\}$ を対応させる「ポアソン・ブラケット」を生じる．ポアソン・ブラケットは一般化されたハミルトン形式およびラグランジュ形式の古典力学において基本的な役割を演じ，Dirac はこれを中心にすえて量子化を行った．特に，彼は古典的な関数 $\{f,g\}$ が，f と g を表している作用素の交換関係 $[\widehat{f},\widehat{g}]$ と比例していると設定した．この方法は，古典的な系，特に位相的に複雑な古典的状態空間 $\mathcal{S}$ を持つ系に対する現代的量子化法を与える点で重要である．

ここで，単純な調和振動子が初等波動力学においてどのように扱われるか，特にエネルギーを表す作用素を得る方法，を考察することは有益である．状態空間 $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ の古典的なエネルギー関数は

$$H(x,p) := \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{5.6}$$

である．そして，量子論での対応する作用素は

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\widehat{x}^2 \tag{5.7}$$

であると仮定する．そして規則

$$(\widehat{x}\psi)(x) \quad := \quad x\psi(x) \tag{5.8}$$

$$(\widehat{p}\psi)(x) \quad := \quad -i\hbar\frac{d\psi}{dx}(x) \tag{5.9}$$

によって波動関数 $\psi(x)$ に作用するので，

$$(\widehat{H}\psi)(x) := \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\psi(x). \tag{5.10}$$

となる．後に式 (5.8–5.9) の起源に立ち戻るが，当面はどうして式 (5.7) が式 (5.6) から得られるのか考察する．我々は，古典的な状態空間で関数の特定の関係として式 (5.6) を書き直すことから始める:

$$H = \frac{1}{2m}(f_{\mathrm{mom}})^2 + \frac{m\omega^2}{2}(f_{\mathrm{pos}})^2 \tag{5.11}$$

それから，注意深く写像 $H \mapsto \widehat{H}$ が造られる方法を見よう．少し考えると，以下のことが (しばしば暗黙のうちの) 仮定されていることがわかる:

1. 古典的な関数 $(f_{\mathrm{mom}})^2$ を表す作用素は，$\widehat{p}^2$ である．つまり f_{mom} を表す作用素の 2 乗である．そして f_{pos} についても同様．

2. $\frac{1}{2m}(f_{\mathrm{mom}})^2$ を表す作用素は，$\frac{1}{2m}$ 掛ける $(f_{\mathrm{mom}})^2$ を表す作用素である．また $\frac{m\omega^2}{2}(f_{\mathrm{pos}})^2$ についても同様．

3. $\frac{1}{2m}(f_{\mathrm{mom}})^2$ と $\frac{m\omega^2}{2}(f_{\mathrm{pos}})^2$ の和を表す作用素は，$\frac{1}{2m}(f_{\mathrm{mom}})^2$ と $\frac{m\omega^2}{2}(f_{\mathrm{pos}})^2$ を表す作用素の和である．

このような演算は，波動力学を応用するときしばしばなされ，量子化の手順についての以下の 2 つの仮定に要約される:

Q1 量子化の手順は，**線形性を保存**する，つまり 量子化の写像 $f \mapsto \widehat{f}$ は線形であり

$$r_1 f_1 + r_2 f_2 \mapsto r_1 \widehat{f_1} + r_2 \widehat{f_2}. \tag{5.12}$$

である．

Q2 量子化の手順は，以下の意味で**関数形を保存**する．つまり，$\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の実関数ならば，$\mathcal{S}$ 上の実数値関数 $\mathcal{F}(f)$ は，次のように定義される：

$$\mathcal{F}(f)(s) := \mathcal{F}(f(s)) \qquad \text{すべての } s \in \mathcal{S}. \tag{5.13}$$

すると，f を表す作用素が $\widehat{f}$ であるならば，$\mathcal{F}(f)$ を表す作用素は $\mathcal{F}(\widehat{f})$ つまり

$$\widehat{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(\widehat{f}). \tag{5.14}$$

である．

波動力学だけでなく量子論で一般に共通の仮定は，任意の与えられた古典的な系の量子化は，これら 2 つの規則に従うことである．もちろん，これが意味を持つために，一般的な関数 $\mathcal{F}$ に対して記号 $\mathcal{F}(\widehat{f})$ を定義しなければならない．これは，5.2.2 節で与えられる．

解説

1. 従来の波動力学はさらに，それぞれ位置と運動量を表す作用素 $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ は正準交換関係

$$[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar. \tag{5.15}$$

を満たすという条件を課す．7.2 節で示すように，これは物理的な空間の一様な性質が深く関係する．また，ヒルベルト空間の上のあらゆる作用素

が，作用素 $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ の関数として書かれると要請する．これは，対応する古典論において，どの観測量も x と p の関数である (つまり 関数 $f_{\rm pos}$ と $f_{\rm mom}$ の関数) 事実を反映しているのである．ストーンとフォン・ノイマンの特筆すべき定理は，(若干の技術的な注意のもとで) その上で自己共役作用素が式 (5.15) を満たすヒルベルト空間が本質的に一つだけあることを言う．他の空間は，同じ物理的結果を与えることが保証される．この特別な空間は，内積の式 (2.42)(つまり 普通の重なり関数) による2乗可積分関数のヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$，および，$\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ に対するよく知られた作用素の式 (5.8–5.9) である（(Reed & Simon 1972)）．

2. 初等波動力学における付加的な仮定は，任意の古典的観測量 $f(x,p)$ に対応する量子作用素が $f(\widehat{x},\widehat{p})$ となることである．しかし，後者にはあいまいな点があることに注意しよう．つまり，古典的には xp と px は同じ観測量だが，$\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ が交換しないので，作用素 $\widehat{x}\widehat{p}$ と $\widehat{p}\widehat{x}$ は異なる．さらにそのどちらも自己共役ではない．従って，いわゆる**対応規則**は注意深く使わなければならない．

幾つかの対応は，線形性の保存および関数形保存の仮定から導ける．例えば，これらの規則によれば，$(x+p)^2$ の量子化は，$(\widehat{x}+\widehat{p})^2=\widehat{x}^2+\widehat{p}^2+\widehat{x}\widehat{p}+\widehat{p}\widehat{x}$ である[8]．他方，$(x+p)^2=x^2+p^2+2xp$ であり，x^2 と p^2 の量子化は，それぞれ $\widehat{x}^2$ と $\widehat{p}^2$ である．よって，$2xp\equiv(x+p)^2-x^2-p^2$ と書くことによって，量子化は $2xp\mapsto(\widehat{x}^2+\widehat{p}^2+\widehat{x}\widehat{p}+\widehat{p}\widehat{x})-\widehat{x}^2-\widehat{p}^2$ であり

$$xp\mapsto\frac{1}{2}(\widehat{x}\widehat{p}+\widehat{p}\widehat{x}) \tag{5.16}$$

となることがわかる．つまり $\widehat{xp}=\frac{1}{2}(\widehat{x}\widehat{p}+\widehat{p}\widehat{x})$．上の議論は簡単に拡張できて，線形性保存と関数形保存の仮定から，関数のペア $f,g:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ に対して，

$$fg\mapsto\frac{1}{2}(\widehat{f}\widehat{g}+\widehat{g}\widehat{f}). \tag{5.17}$$

---

[8] 厳密には，関数 $(f_{\rm pos}+f_{\rm mom})^2$ の量子化を言わなければならない．しかし，物理学者の慣習に従って $(x+p)^2$ と書く．つまり古典的な状態空間の一般的な点 (x,p) での値で関数を定義する．

となる．しかし，この特定の量子化の規則は一連の矛盾に導く．例えば，$x(xp)$ の量子化は

$$
\begin{aligned}
x(xp) \quad &\mapsto \quad \frac{1}{2}(\widehat{x}\,\widehat{xp}+\widehat{xp}\,\widehat{x}) = \frac{1}{4}\big(\widehat{x}(\widehat{xp}+\widehat{px})+(\widehat{xp}+\widehat{px})\widehat{x}\big) \\
&= \quad \frac{1}{4}(\widehat{x}^2\,\widehat{p}+\widehat{p}\,\widehat{x}^2+2\widehat{x}\,\widehat{p}\,\widehat{x})
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

であることが式 (5.16–5.17) からわかる．他方同じ仮定を利用して，$(x^2)p$ の量子化は (古典的に，$x(xp)$ と同一であるが)

$$
(x^2)p \mapsto \frac{1}{2}(\widehat{x^2}\,\widehat{p}+\widehat{p}\,\widehat{x^2}) = \frac{1}{2}(\widehat{x}^2\,\widehat{p}+\widehat{p}\,\widehat{x}^2), \tag{5.19}
$$

にならなければならない．しかしこれは式 (5.18) とは異なる．このような矛盾は，線形性保存及び関数形保存の量子化の仮定は，正しい規則でないことを示す．それらは古典的な系から特定の量子作用素を造る発見的な方法とみなせるが，一般的なものではないのである．あるいはもし，それらが基本的であると考えるならば，基本的量子規則のうちのどれか 1 つは変えなければならない．実際普通は，すべての関数 $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ に量子作用素を結びつけることは不可能である．与えられた古典的な系を量子化するとき通常は，自己共役作用素を古典的な観測量の一部分にだけ対応させることから始めて (例えば波動力学では，x と p の線形和だけ考えた)，さらに物理的に興味ある量に，この手順を注意深く拡張するのである．

3. 実際には，この手順が多くの重要な量子系を生成するにしても，このような場当たり的な方法は不満足で，与えられた古典的な系を「量子化する」と言うアイディア自体に懸念がわく．多分，実際の理論を作るには古典的な測定器が必要だという Bohr の批判に引きずられているのだろう．より論理的プロセスとしては，ある固有の方法において与えられた量子系から出発して，それからその古典的な極限について議論するものであろう．

残念なことに，量子系を指定するための「固有の方法」が明確には理解されていない．従って重要な問題は，線形性保存と関数形保存の仮定から古典的な系を量子化したのと同じような，何らかの方法が考えられないかということである．

すでに量子化されていて対応する古典系が無い場合,「量子化」の写像 $A \mapsto \widehat{A}$ を，古典的な状態空間の上の関数としてでなく，物理的な量の上で直接定義する，とするのはどうだろう．この方法では，文字 A は単に，(エネルギー，位置，角運動量，などの) 物理量の名前である．この場合，関係 $A \mapsto \widehat{A}$ は，構造化されていない量から，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の自己共役作用素の集合への写像である．根底にある古典的な構造が無いならば，この量子化の写像は，中間の関数 $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ や $f_A \mapsto \widehat{A} := \widehat{f}_A$ を含む形には書けない．つまり $A \mapsto \widehat{A}$ だが，$A \mapsto f_A \mapsto \widehat{f}_A$ ではない．中心問題は，いかにして $r_1A_1 + r_2A_2 \mapsto r_1\widehat{A_1} + r_2\widehat{A_2}$ または $\widehat{\mathcal{F}}(A) = \mathcal{F}(\widehat{A})$ のような量子化の条件を作るか—もしあれば—ということである．

ここで問題になるのは，$r_1A_1 + r_2A_2$ または $\mathcal{F}(A)$ のような数式の物理的な意味である．例えば古典物理学においては，$\mathcal{F}(A)$ は，任意の状態での値が，A の値の関数 $\mathcal{F}$ である物理量を表す．このように，物理的な量 A を表す関数 $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ を用いて，量 $\mathcal{F}(A)$ は，任意の $s \in \mathcal{S}$ に対して，関連する関数 $f_{\mathcal{F}(A)} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ を，次のように指定することによって定義される：

$$f_{\mathcal{F}(A)}(s) := \mathcal{F}(f_A(s)) \tag{5.20}$$

しかし，そのような定義は，実用論の量子論においては適切でない．なぜなら，測定前に観測量が値を所有すると仮定されていないからである．実際，Kochen–Specker の定理の議論においてわかるが (9.1 節)，記号 $\mathcal{F}(A)$ の解釈は，所有された特性を量子系に割り当てる試みの中でさえ重要な問題である．

観測量 A の関数 $\mathcal{F}$ に意味を与える 1 つの方法は，それが測定される方法を指定して，観測量 $\mathcal{F}(A)$ の「操作上の」定義を採用することである．つまり A を測定した後，関数 $\mathcal{F}$ を測定の結果に適用するのである．それで，関数形保存の条件式 (5.14) を課すことは意味を持つようになる．同じように，実数 r と観測量 A の積 rA の操作上の定義を見つけるのも問題が無い．それは，A を測定しその結果に r を掛けて得られる量である．

しかし，観測量 A と B の和 $A + B$ については，状況はいくぶん異なる．操作論の方法は，同時に A と B を測定して，結果の和として $A + B$

に意味を与える．しかし，A と B を表す作用素 $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ が交換しないとき問題が生じる．多くの人々は，零でない交換関係は，A と B は同時に測定できないことを示すと考える．この場合，$A+B$ の上のような操作上の意味は与えられない．これが本当にそうであるか否かは，まさに「測定」がどのように構成されるかによる．我々は，6.3 節でこの問題に戻る．しかし当面は，Park と Margenau の仕事に言及するので十分である．彼らはいくつかの方法で，非可換な量が同時に測定「できる」ことを示唆した (Park & Margenau 1968)．しかし彼らは，式 (5.18–5.19) の文脈において矛盾が現れることを更に証明するのである．

電子スピンの x，y 成分を考察して，Park と Margenau は同時測定の良い例を与えた．対応する量子作用素は $\widehat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ と $\widehat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ であり，σ_x と σ_y は式 (1.23) で定義されるパウリ・スピン行列である．S_x または S_y を測定した結果は $\pm\frac{\hbar}{2}$ なので，同時測定の結果の和は $\hbar$，0 または $-\hbar$ でなければならない[9]．他方，作用素 $\frac{\hbar}{2}\sigma_x + \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ は $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ でありその固有値は $\hbar/\sqrt{2}$ と $-\hbar/\sqrt{2}$ である．これは $\hbar$，0 または $-\hbar$ と等しくない．このように，$A+B$ の操作論的意味は，同時に A と B を測定してから，結果の和をとるとすると矛盾である．

そのような矛盾の存在は，量子物理学と古典物理学を区別する 1 つの特徴である．例えば，状態 (x,p) での古典的なハミルトン作用素，式 (5.11) の値は，その状態で $\frac{1}{2m}(f_{\mathrm{mom}})^2$ と $\frac{m\omega^2}{2}(f_{\mathrm{pos}})^2$ の値の和をとることによって得られる．しかし，式 (5.7) の量子作用素 $\widehat{H}$ の固有値は，作用素 $\frac{\widehat{p^2}}{2m}$ と $\frac{m\omega^2}{2}\widehat{x}^2$ の固有値と単純には関係しない．このように，たとえ位置と運動量が一緒に測定できたとしても，量子論において直接エネルギーを測定した結果は，$\frac{p^2}{2m}$ と $\frac{m\omega^2}{2}x^2$ を別々に測定した結果の和と，等しくない．

Margenau と Park は，対応する古典系が無い一般の場合でも，すべての観測量が量子作用素に対応するというわけではない，という結論に行き着いた．そういうわけで彼らは，規則 2 を改めて，**ある**観測量が自己共役作用素として表現される，とした．いずれにしても，観測量の代数関数に

---

[9] 観測量 A を測定した結果は，対応する自己共役作用素 $\widehat{A}$ の固有値のうちの 1 つでなければならないと仮定している．これは 5.3 節で証明される．

ついての議論には配慮が必要である．実際問題として最も重要な条件は，通常どんな量子化の方法においても成立すると仮定される関数形保存の条件 $\widehat{\mathcal{F}(A)} = \mathcal{F}(\widehat{A})$ である．Kochen-Specker 定理を 9.1 節で議論するとき，この問題に戻る．

5.2.2 $F(\widehat{A})$ の定義

次の問題は，以上で自由に利用されてきた表現 $\mathcal{F}(\widehat{A})$ を解明することである．つまり作用素の関数とは何を意味するのだろうか？どんな作用素 $\widehat{A}$ でも，その多項式関数は簡単に定義できる．例えば $b\widehat{A}+c\widehat{A}^2+d\widehat{A}^3$ なら，$(b\widehat{A}+c\widehat{A}^2+d\widehat{A}^3)\vec{\psi} := b(\widehat{A}\vec{\psi})+c\widehat{A}(\widehat{A}(\vec{\psi}))+d\widehat{A}(\widehat{A}(\widehat{A}(\vec{\psi})))$ である．しかし $\log\widehat{A}$ ではどうだろう？

$\widehat{A}$ が自己共役であるときは，この問題には，非常に重要なよく知られた答えがある．Dirac 表記法を使って，$|a\rangle$ を固有値が a である $\widehat{A}$ の固有状態であるとしよう．つまり $\widehat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle$．すると

$$\widehat{A}^2\,|a\rangle = a^2\,|a\rangle, \qquad \widehat{A}^3\,|a\rangle = a^3\,|a\rangle \tag{5.21}$$

そして一般に，Q がどんな多項式関数でも，

$$Q(\widehat{A})\,|a\rangle = Q(a)\,|a\rangle \tag{5.22}$$

となる．式 (5.22) に習って，**任意の**関数 $\mathcal{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{F}(\widehat{A})\,|a\rangle := \mathcal{F}(a)\,|a\rangle. \tag{5.23}$$

と定義しよう．例えば，固有値 a が正であれば，$\log\widehat{A}\,|a\rangle := \log a\,|a\rangle$ は意味をなす．このように，関数 $\mathcal{F}$ が対応する固有値の上ではっきりしているならば，$\widehat{A}$ のあらゆる固有ベクトルに作用する $\mathcal{F}(\widehat{A})$ に意味が与えられる．

全てのベクトルにこれを拡張するために，基本的な展開定理の式 (3.50)

$$|\psi\rangle = \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(m)} \langle a_m, j|\psi\rangle\,|a_m, j\rangle \tag{5.24}$$

を使おう．ここで，$a_1, a_2, \ldots, a_M$(M は ∞ でもよい) は $\widehat{A}$ の異なった固有値 (スペクトルは離散的であると仮定する)，$j = 1, 2, \ldots, d(m)$ は共有の固有値 a_m に対する縮退した固有ベクトルをラベルする．すると，式 (5.23) から，任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して定義

$$\mathcal{F}(\widehat{A})\,|\psi\rangle := \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(m)} \mathcal{F}(a_m)\langle a_m, j|\psi\rangle\,|a_m, j\rangle = \sum_{m=1}^{M} \mathcal{F}(a_m)\widehat{P}_m\,|\psi\rangle \tag{5.25}$$

が示唆される．ここで，$\widehat{P}_m := \sum_{j=1}^{d(m)} |a_m, j\rangle\langle a_m, j|$ は，固有値 a_m の固有ベクトルが作る部分空間の上への射影作用素である (式 (3.55) を参照)．$\mathcal{F}(a_m)$ が各々の固有値 a_m に対してはっきりしている (つまり 無限でない) ならば，この定義は意味をなす．同等に，

$$\mathcal{F}(\widehat{A}) := \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(m)} \mathcal{F}(a_m)\,|a_m, j\rangle\langle a_m, j| = \sum_{m=1}^{M} \mathcal{F}(a_m)\widehat{P}_m \tag{5.26}$$

と書くこともできる．これは，$\mathcal{F}$ が $a \in \mathbb{R}$ の多項式関数であるときは定義式 (5.22) に一致し，さらに，自己共役作用素 $\widehat{A}$(式 (3.59) を参照) のスペクトル表現とも整合する．

実際に，スペクトル表現 $\widehat{A} = \sum_{m=1}^{M} a_m\widehat{P}_m$ と直交条件式 (3.56)($\widehat{P}_m\widehat{P}_n = \delta_{mn}\widehat{P}_m$) から，例えば，$\widehat{A}^2 = \sum_{m=1}^{M} a_m^2\widehat{P}_m$ がすぐわかり，より一般に，$\mathbb{R}$ の任意の複素数値多項式関数 Q に対しても，

$$Q(\widehat{A}) = \sum_{m=1}^{M} Q(a_m)\widehat{P}_m. \tag{5.27}$$

となる．これは，定義

$$\mathcal{F}(\widehat{A}) := \sum_{m=1}^{M} \mathcal{F}(a_m)\widehat{P}_m \tag{5.28}$$

を考える強い動機を与え，式 (5.26) を再現する．$\mathcal{F}(a)$ が全ての a に対して実ならば，作用素 $\mathcal{F}(\widehat{A})$ は自己共役である．[演習問題]

5.3　規則3のもうひとつの形

5.3.1　主定理

規則3は，1章の初等波動力学の類似した規則と，いくぶん異なるように見える．しかし，以下の定理がある (簡単のために $\widehat{A}$ の固有値スペクトルが離散的である仮定する):

定理

1. A の測定の唯一可能な結果は，A を表す作用素 $\widehat{A}$ の固有値のうちの1つである．
2. 状態ベクトルが $|\psi\rangle$ であるときに A が測定されれば，結果が特定の固有値 a_n であるという確率は

$$\mathrm{Prob}(A = a_n; |\psi\rangle) = \langle\psi| \widehat{P}_n |\psi\rangle \tag{5.29}$$

である．ここで，$\widehat{P}_n := \sum_{j=1}^{d(n)} |a_n, j\rangle\langle a_n, j|$ は，固有値 a_n の固有空間の上への射影作用素である．

証明

1. 我々の問題は，**期待される結果**に関する記述 (規則3が提供) を，測定で特定の結果を与える確率の記述に，同等に言い換えることである．はじめに，どんな統計系でも A の任意の関数 $\mathcal{F}(A)$ の期待値が

$$\langle\mathcal{F}(A)\rangle = \sum_{m=1}^{M} \mathcal{F}(\alpha_m) \,\mathrm{Prob}(A = \alpha_m) \tag{5.30}$$

となることに気がつく．ここで $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$ は，A の全ての可能な値の集合である (簡単のために，離散的だと仮定する)．そして，$\mathrm{Prob}(A = \alpha_m)$ は特定の値 α_m に付随する確率である．特に，各 $r \in \mathbb{R}$ に対して，(**cf.** 式 (4.10))

$$\chi_r(t) := \begin{cases} 1, & t = r \text{ の場合}, \\ 0 & \text{その他の場合}. \end{cases} \tag{5.31}$$

によって定義される実数の関数 χ_r を考察する．このように，$\chi_r(A)$ は，$A=r$ なら 1 で，そうでなければ 0 である量である．4.2 節で議論された古典物理学の言葉では，それは物理的な量 A が値 r を持つという命題を表す．式 (5.30) は，$\text{Prob}(A=r)=\langle\chi_r(A)\rangle$ を意味する．これが，A の測定が，特定のある値になる確率を記述する．

量子論の場合，所有される値でなく測定結果に関して表現されて，式 (5.30) は任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して，$\mathcal{F}(A)$ の測定で期待される結果が

$$\langle\mathcal{F}(A)\rangle_\psi=\sum_{m=1}^{M}\mathcal{F}(\alpha_m)\,\text{Prob}(A=\alpha_m;\,|\psi\rangle) \tag{5.32}$$

であることを意味する．よって，特別な観測量 $\chi_r(A)$ は，

$$\text{Prob}(A=r;\,|\psi\rangle)=\langle\chi_r(A)\rangle_\psi \tag{5.33}$$

という特性を持つ．それで，規則 3 によって

$$\langle\chi_r(A)\rangle_\psi=\langle\psi|\,\widehat{\chi_r(A)}\,|\psi\rangle=\langle\psi|\,\chi_r(\widehat{A})\,|\psi\rangle \tag{5.34}$$

となる．この第二の等式は関数形保存の量子化の条件から導かれる．ここで，

$$\chi_r(\widehat{A}):=\sum_{m=1}^{M}\chi_r(a_m)\widehat{P}_m=\begin{cases}\widehat{P}_m, & a_m=r\text{ の場合,}\\ 0 & \text{その他の場合.}\end{cases} \tag{5.35}$$

である．このように，r が $\widehat{A}$ の固有値のうちの 1 つでない限り，式 (5.33–5.34) は $\text{Prob}(A=r;\,|\psi\rangle)=0$ を示す．これで定理の最初の部分を証明した．

2. r がある固有値 a_n であるとしよう．すると式 (5.34) の右辺は $\langle\psi|\,\widehat{P}_n\,|\psi\rangle$ なので，定理の言うように，$\text{Prob}(A=a_n;\,|\psi\rangle)=\langle\psi|\,\widehat{P}_n\,|\psi\rangle$ となる． **証明終り**

解説

1. 固有値 a_n が非縮退ならば，式 (5.29) は，a_n を得る確率が $|\langle a_n|\psi\rangle|^2$ であるというよく知られた結果を与える．

2. 関数形保存の条件 $\widehat{\mathcal{F}(A)} = \mathcal{F}(\widehat{A})$ は，この定理を証明するのに中心的役割を果たした．実際にこのことによって，この条件を捨て去れないのである．

3. 規則 $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \widehat{A} | \psi \rangle$ は，完全に次の両規則に等価である:

(i) 測定結果は常に固有値である．

(ii) $\mathrm{Prob}(A = a_n;\, |\psi\rangle) = \langle \psi | \widehat{P}_n | \psi \rangle$.

我々は，規則 $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \widehat{A} | \psi \rangle$ が (i) と (ii) を意味することを示した．逆に，この両規則を仮定すれば，期待値の普通の定義は，まさに

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &= \sum_{m=1}^{M} a_m \,\mathrm{Prob}(A = a_m; \psi) = \sum_{m=1}^{M} a_m \langle \psi | \widehat{P}_m | \psi \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{M} \langle \psi | \widehat{A}\widehat{P}_m | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{A} | \psi \rangle \end{aligned} \tag{5.36}$$

を与える．これを導くのに，$\widehat{A}\widehat{P}_m = a_m \widehat{P}_m$ と 1 の分割 $\widehat{\mathbb{1}} = \sum_{m=1}^{M} \widehat{P}_m$ を利用した．

4. 規格化条件 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ と 1 の分割 $\widehat{\mathbb{1}} = \sum_{m=1}^{M} \widehat{P}_m$ を使うと，

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_{m=1}^{M} \langle \psi | \widehat{P}_m | \psi \rangle \tag{5.37}$$

となるので，当然成立するべき式

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{Prob}(A = a_m;\, |\psi\rangle) = 1 \tag{5.38}$$

が出てくる．この結果は量子論の確率規則の内部整合性にとって不可欠であり，それは (数学的に，全く自明でない) 展開定理の式 (3.52–3.59) の深い物理的な重要性を表す．このように，一般化されたピタゴラスの定理は量子論の理論形式の核心をなす．

5. 定理の第二の部分は重要な含蓄を持つ．状態ベクトルが $\widehat{A}$ の固有ベクトル $|a_m\rangle$ である場合に，観測量 A の測定を考えよう．式 (5.29) によれば関係 $\langle a_n|a_m\rangle = \delta_{nm}$ は，結果 a_m を得る確率が 1 であり，他のどの数を得る確率も 0 であることを意味する．このように，A の測定により結果 a_m を生じることが保証されている — 系が A の値を所有している，ということに意味がある状況である．しかし，もうひとつの観測量 B があって，$[\widehat{A}, \widehat{B}] \neq 0$ である場合，一般に，状態 $|a_m\rangle$ は $\widehat{B}$ の固有ベクトルの線形結合である．従って，たとえ観測量 A はこの状態において値を持つとしても，他の観測量に対しては，その作用素表現が $\widehat{A}$ と非交換なら，そうとはいえない．(作用素ペアの可換性・非可換性についての一般的議論は 6.3 節を参照)．

6. 射影作用素は，量子論の技術及び概念上の基礎として，中心的な役割を演ずる．3.2 節から，作用素 $\widehat{P}$ は，$\widehat{P} = \widehat{P}^\dagger$ と $\widehat{P}^2 = \widehat{P}$ を満たす場合に限り射影作用素であることを思い出そう．その典型例は，自己共役作用素 $\widehat{A}$ の固有値 a_m に対する固有ベクトル空間の上へ射影する $\widehat{P}_m := \sum_{j=1}^{d(m)} |a_m, j\rangle\langle a_m, j|$ である．

方程式 $\widehat{P}^2 = \widehat{P}$ は射影作用素 $\widehat{P}$ が 2 つだけの固有値，0 と 1，を持つことを示す．よって，上の定理によれば，2 値だけを持つことができる観測量に対応する．例えば，作用素 $\widehat{P}_m$ の表す観測量は操作的に次のように構成される．つまり A が測定されて，結果 a_m が得られたときの数値は 1 で，そうでなければ数値は 0 とする．このように $\widehat{P}_m$ は,「A が測定されれば，結果は a_m である」という命題と関係している．より実在論の視点では，この命題は「A は値 a_m を持つ」となる．古典物理学では，この型の命題は，真であるか偽であり，これは通常の命題論理学の特徴でもある．9.2 節で量子論理の議論において見るように，量子論の状況は潜在的により込み入っている．

5.3.2　簡単な例

低次元ベクトル空間での量子論の簡単な例を用いて，上の定理を説明するとわかりやすい．

問題

ρ-中間子のスピン自由度は，以下の行列によってベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ の上で表される

$$\widehat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i)　S_z を測定すると，可能な結果は何か？

(ii)　状態ベクトルが $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$ ならば，いろいろな結果を得る確率はいくらか？

(iii)　これらの確率の総和が 1 となることを確認すること．

解答

(i)　S_z の測定の可能な結果は，行列 $\widehat{S}_z$ の固有値である．これはすでに対角行列なので，固有値はまさに対角要素，$\hbar, 0, -\hbar$ である．

(ii)　3 つの可能な結果を得る確率を計算するためには，この作用素の規格化された固有ベクトルを必要とする．視察によって，これらの固有値 $\hbar$，0 と $-\hbar$ に対応する固有ベクトルは，それぞれ

$$|+\hbar\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\hbar\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．これらは，1 に規格化されている．

次のステップは，状態ベクトル $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$ の規格化である．このベクトルのノルムは，

$$\| \, |\phi\rangle \|^2 = \langle\phi|\phi\rangle = (1, -i, -2) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} = 6$$

なので，規格化された状態ベクトルは

$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

このように，要求された確率は

$$(a) \quad \mathrm{Prob}(S_z = +\hbar;\, |\psi\rangle) = |\langle +\hbar|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{6} \left| (1,\ 0,\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{6},$$

$$(b) \quad \mathrm{Prob}(S_z = 0;\, |\psi\rangle) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{6} \left| (0,\ 1,\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{6},$$

$$(c) \quad \mathrm{Prob}(S_z = -\hbar;\, |\psi\rangle) = |\langle -\hbar|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{6} \left| (0,\ 0,\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{2}{3}.$$

(iii) 確率の和は，$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 1$ である．

第 6 章　技術的な展開

6.1　混合状態と密度行列

6.1.1　主となる概念

この章では，前章において提示された量子規則の技術的な展開を議論する．最初に，混合状態 $\rho := (\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \ldots, \vec{\psi}_D; w_1, w_2, \ldots, w_D)$ を含む場合に，これらの規則をどう一般化するべきかについて考える．ここで，ベクトル状態が $\vec{\psi}_d$ である「古典的な」確率が w_d である．ただし，$0 < w_d \leq 1$ 及び $\sum_{d=1}^{D} w_d = 1$ である．

ベクトル状態 $|\psi\rangle$ に対する重要な規則は，$\mathrm{Prob}(A = a_n; |\psi\rangle) = \langle\psi| \widehat{P}_n |\psi\rangle$ である．従って，混合状態に対応する規則は，量子力学の確率と古典的な確率が互いに独立であるという仮定のもとで，

$$\mathrm{Prob}(A = a_n; \rho) = \sum_{d=1}^{D} w_d \, \mathrm{Prob}(A = a_n; |\psi_d\rangle) = \sum_{d=1}^{D} w_d \langle\psi_d| \widehat{P}_n |\psi_d\rangle \tag{6.1}$$

である．

我々の課題は，式 (6.1) を簡潔に表現することである．このために，$\widehat{B}$ を任意の作用素とし，$\{ |e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_N\rangle \}$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底であるとしよう．$\widehat{B}$ の**トレース（跡）**は次のように定義される：

$$\mathrm{tr}\,\widehat{B} := \sum_{i=1}^{N} \langle e_i| \widehat{B} |e_i\rangle \tag{6.2}$$

そしてこれは，基底の選択によらないことが [演習] で示される[1]．これは，明らかに行列のトレースの自然な一般化である．さて，$|\psi\rangle$ を $\mathcal{H}$ の任意のベクトルであるとしよう．すると

$$\begin{aligned}\langle\psi|\,\widehat{B}\,|\psi\rangle &= \sum_{i=1}^{N}\langle\psi|\,\widehat{B}\,|e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^{N}\langle e_i|\psi\rangle\langle\psi|\,\widehat{B}\,|e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N}\langle e_i|\,\widehat{P}_\psi\widehat{B}\,|e_i\rangle = \operatorname{tr}\left(\widehat{P}_\psi\widehat{B}\right)\end{aligned} \tag{6.3}$$

となる．ここで $\widehat{P}_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ である．従って，トレース演算を用いて基本的な確率の規則，式 (5.29) は次のように書き直せる．

$$\mathrm{Prob}(A=a_n;\,|\psi\rangle) = \operatorname{tr}\left(\widehat{P}_\psi\widehat{P}_n\right), \tag{6.4}$$

一方，期待される結果は

$$\langle A\rangle_\psi = \operatorname{tr}\left(\widehat{P}_\psi\widehat{A}\right) \tag{6.5}$$

である．さて，混合状態作用素 $\widehat{\rho}$ を次のように定義しよう：

$$\widehat{\rho} := \sum_{d=1}^{D} w_d\,\widehat{P}_{|\psi_d\rangle}. \tag{6.6}$$

ここで，w_d はベクトル状態が $|\psi_d\rangle$ であるという古典的な確率である．すると，$\operatorname{tr}\widehat{B}$ が作用素 $\widehat{B}$ の線形関数であるので，式 (6.1) は以下のようになる:

$$\mathrm{Prob}(A=a_n;\rho) = \sum_{d=1}^{D} w_d \operatorname{tr}\left(\widehat{P}_{|\psi_d\rangle}\widehat{P}_n\right) = \operatorname{tr}\left(\sum_{d=1}^{D} w_d\widehat{P}_{|\psi_d\rangle}\widehat{P}_n\right)$$

従って，

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A=a_n;\rho) = \operatorname{tr}\left(\widehat{\rho}\,\widehat{P}_n\right).} \tag{6.7}$$

[1] 無限次元の場合は，トレースが実際に存在する，すなわち 無限和が収束する作用素に制限する必要がある．これらは，**トレースクラス**作用素と呼ばれている．

期待される結果に対しても同様に,

$$\boxed{\langle A\rangle_\rho = \mathrm{tr}\,(\widehat{\rho}\,\widehat{A})} \tag{6.8}$$

となる．特別な密度行列 $\widehat{\rho} = \widehat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ に対しては，これらの表示は純粋なベクトル状態 $|\psi\rangle$ の，通常の結果を再現する点に注意しよう．

解説

1. 式 (6.6) で定義した作用素 $\widehat{\rho}$ は，以下の性質を持つ:

(i) $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}^\dagger$

(ii) $\widehat{\rho}$ は，半正定値作用素である．すなわち，任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|\widehat{\rho}|\psi\rangle \geq 0$ である．

(iii) $\mathrm{tr}\,\widehat{\rho} = 1$

一般に，これら 3 条件を満たしている任意の作用素は，密度行列と呼ばれる．

$\widehat{\rho}$ がそのような任意の作用素であるならば，式 (6.6) の形でなくとも，式 (6.7) が確率付与のための基本要求の式 (2.1–2.2) を満たすことはすぐわかる．このように，我々は確率を与えることができる数学的な対象を一見拡張したかのように見える．しかし実際は，$\widehat{\rho}$ は自己共役作用素であるので，スペクトルの定理が適用され，これにより $\widehat{\rho}$ が式 (6.6) の形式で書かれてしまうのである．ここで実数 $w_1, w_2, \ldots, w_D$ は $\widehat{\rho}$ の固有値である．このように，一般的な密度行列を考えたからといって新しいものが出てくるわけではない．しかし以下に注意しよう:

- これらの固有値の一部はお互いに等しいかもしれない．そしてその場合，縮退した部分空間を張るベクトルは一意的には選べない．

- 与えられた密度行列 $\widehat{\rho}$ にスペクトル定理を使えば，分解式 (6.6) に現れているベクトルはお互いに直交している．しかしこの直交性は，古典的に重みをつけた状態の和に対して必ずしも必要ではない．

これらの 2 つの特徴は，与えられた密度行列が式 (6.6) の形の一意的な分解を与えないという重要な事実を反映する．例えば，電子のスピンに対して，$\widehat{S}_z$ の固有値が $\frac{\hbar}{2}$ と $\frac{-\hbar}{2}$ の固有状態の上への射影作用素は，それぞれ

$$\widehat{P}_{S_z=\hbar/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P}_{S_z=-\hbar/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

である．一方，$\widehat{S}_x$ の固有状態の上への射影作用素は，

$$\widehat{P}_{S_x=\hbar/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P}_{S_x=-\hbar/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

である．すると例えば，密度行列 $\widehat{\rho} := \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ は和 $\frac{1}{2}\widehat{P}_{S_z=\hbar/2}+\frac{1}{2}\widehat{P}_{S_z=-\hbar/2}$ として書けて，この状態は，$|S_z = \hbar/2\rangle$ および $|S_z = -\hbar/2\rangle$ の固有状態から同確率で構成されていると言えるだろう．Stern-Gerlach 装置の出力を無作為に混ぜることによって，そのような密度行列を作れる[2]．装置を z-軸に沿う向きに固定して，上向きスピンの電子だけを通すフィルターと下向きスピンの電子だけ通すフィルターをセットするのである．

他方，$\widehat{\rho}$ はまた和 $\frac{1}{2}\widehat{P}_{S_x=\hbar/2} + \frac{1}{2}\widehat{P}_{S_x=-\hbar/2}$ とも書けて，これは S_x の固有状態の確率的な混合として解釈できる．しかしこれは，S_z を使う解釈と同じものではない．本来純粋状態で記述されるべき対象に対して，この分解の非一意性は，情報の欠如の数学的測度として密度行列を単純に解釈することを難しくする．

2. $\{\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2, \ldots, \widehat{\rho}_K\}$ を任意の密度行列，$\{r_1, r_2, \ldots, r_K\}$ を $\sum_{k=1}^{K} r_k = 1$ を満たす正の実数としよう．すると，**アフィン和** $\sum_{k=1}^{K} r_k\widehat{\rho}_k$ も密度行列であるための条件を満たす事がすぐわかる．このことは，密度行列の集合をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の全ての有界作用素からなるベクトル空間の部分集合とみなせば，それは凸であることを意味する．特別な密度行列 $\widehat{P}_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ は，このようにアフィン和に分解できないただ一つの状態であり，それらは幾何学的には，凸集合の境界に位置すると見ることがで

[2] 実際の Stern-Gerlach 装置は，電子線ではなく，全角運動量が $\frac{1}{2}\hbar$ である銀原子のビームであるが，そのことはここで重要でない．

きる．このタイプの状態を**純粋**であると言う．そしてその他のすべてを，**混合**であると言う．量子状態空間に対するこの見方は，量子系を記述する最も一般的な数学的構造の研究で，重要な役割を演ずる．

3. 実用的観点から，混合状態の重要な例は，温度 T にある量子統計系を記述する熱的状態である．対応する密度行列は，

$$\widehat{\rho}_T := \frac{e^{-\widehat{H}/kT}}{Z(T)} \tag{6.11}$$

であり，ここで

$$Z(T) := \mathrm{tr}\left(e^{-\widehat{H}/kT}\right) \tag{6.12}$$

は分配関数，k はボルツマン定数である．ハミルトニアン $\widehat{H}$ にスペクトル定理を用いて，(そして単純のために，エネルギー固有値 $\{E_1, E_2, \ldots, E_M\}$ は非縮退であり離散的だと仮定して)$\widehat{\rho}_T$ は次のように書ける：

$$\widehat{\rho}_T := \sum_{m=1}^{M} \frac{e^{-E_m/kT}}{Z(T)} \, |E_m\rangle\langle E_m| \, . \tag{6.13}$$

そしてそれは，古典的な不確実性，つまり系がどのエネルギー状態 E_m にあるかという熱揺らぎによって引き起こされる不確実性を反映する．式 (6.13) によって，状態が $|E_m\rangle$ である確率は $e^{-E_m/kT}/Z(T)$ である．そして，分配関数 $Z(T)$ は式 (6.12) から計算できて

$$Z(T) = \sum_{m=1}^{M} e^{-E_m/kT} \tag{6.14}$$

となる．ここで，トレースを計算するのに，基底集合 $\{\,|E_1\rangle, |E_2\rangle, \ldots\,\}$ を使った．

6.1.2 簡単な例

量子論では通例のように，密度行列の考えはベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の上の簡単なモデル系を用いてうまく例示できる．

問題

電子のスピン状態は，密度行列 $\rho := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ によって $\mathbb{C}^2$ の上で ($\widehat{S}_z$ の固有状態によって作り上げられる基底で) 表現される．ここで，a と b は $a \geq 0$，$b \geq 0$ と $a+b=1$ をみたす実数である．

(i) スピン S_x の測定がなされると，結果が以下のように得られる確率はいくつか？ (a) $\frac{\hbar}{2}$, (b) $\frac{-\hbar}{2}$.

(ii) これらを使って期待される結果を計算しよう．そして答が式 (6.8) を使った密度行列形式から，直接計算される結果と一致することを確認しよう．

解答

(i) 我々は，一般に式 (6.7) から，$\mathrm{Prob}(A=a_n;\rho) = \mathrm{tr}\,(\widehat{\rho}\,\widehat{P}_{A=a_n})$ であることを知っている．ここで，$\widehat{P}_{A=a_n}$ は固有値 a_n である $\widehat{A}$ の固有ベクトルの部分空間の上への射影作用素である．スピン作用素 $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は，非縮退で $\frac{1}{2}\hbar$ と $-\frac{1}{2}\hbar$ と等しい．正規化固有ベクトルの対応する集合は，$|\rightarrow\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $|\leftarrow\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である (必要な計算の詳細は，本の終わりの問題 9 を参照)．このように，決定的な射影作用素は，$\widehat{P}_{S_x=\hbar/2} = P_{|\rightarrow\rangle}$ と $\widehat{P}_{S_x=-\hbar/2} = P_{|\leftarrow\rangle}$(下記参照) である．ベクトル空間の作用素が特定の行列によって表されるというのは，ある特定の基底系に関してそうであることを意味する．我々は作用素 S_z の固有ベクトル $|e_1\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $|e_2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって与えられる基底系を選択している．このようにすると，状態 $|\rightarrow\rangle$ の上への射影作用素は，次の行列要素を持つ

$$\left(\widehat{P}_{|\rightarrow\rangle}\right)_{ij} := \langle e_i|\,\widehat{P}_{|\rightarrow\rangle}\,|e_j\rangle = \langle e_i|\rightarrow\rangle\langle\leftarrow|e_j\rangle.$$

ここで，$i, j = 1, 2$．これは，まさに次の 2×2 行列である

$$\widehat{P}_{|\rightarrow\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

そして，同じように

$$\widehat{P}_{|\leftarrow\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

それで

$$\widehat{\rho}\,\widehat{P}_{|\rightarrow\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}.$$

そのトレースは，$\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}$ となる．同じように

$$\widehat{\rho}\,\widehat{P}_{|\rightarrow\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

でありそのトレースが，また，$\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}$ である．このように

$$\mathrm{Prob}(S_x = \tfrac{\hbar}{2}; \rho) = \frac{1}{2} = \mathrm{Prob}(S_x = -\tfrac{\hbar}{2}; \rho).$$

(ii) 状態 ρ での S_x の測定の期待される結果は，明らかに $\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2} + (-\frac{1}{2})\frac{\hbar}{2} = 0$ である．他方，混合状態 $\widehat{\rho}$ での観測量 A の測定の期待される結果の一般的な表示は，$\langle A\rangle_\rho = \mathrm{tr}\,(\widehat{\rho}\,\widehat{A})$ である．我々の場合，

$$\widehat{A} = \widehat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

従って，

$$\langle S_x\rangle_\rho = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

そしてこれは，前の計算と一致している．

6.2 連続スペクトルを持つ作用素

3 章で議論したように，無限次元のヒルベルト空間には，固有値が連続区間をなす自己共役作用素がある．波動力学での例は，$\widehat{x}$ と $-i\hbar\frac{d}{dx}$ であり，どちらも固有値が全ての実数直線にわたっている．このことによっていろいろな問題が起きる．例えば，規則 3 の原型そのものは修正不要だが，特定の固有値を見つける確率について主張することはもはや意味がない．むしろ，A を測定した結果が特定の**範囲**に位置する確率を論じなければならない．これは，数学的には (3 章で議論されたこと，つまり対応する固有ベクトルが規格化不可能で，従ってまともな状態ベクトルとしては使えないこと，に関連がある．実数が絶対の正確さで測定されることは決してないので，これは物理的に不合理ではない．実際には，結果はある区間に位置するというだけである．特に，これら規格化できない固有状態は，どんな物理的プロセスによっても準備できない．

連続固有値の完全な数学理論は難しいが，いろいろな方法で展開できる．フォン・ノイマンによる 1 つの方法は，スペクトルが連続する任意の自己共役作用素 $\widehat{A}$ を含む，スペクトル定理の一般化に基づく．この定理は，次のような射影作用素の 1 パラメーター族の存在を言う：$\mathcal{H}$ の任意のベクトルのペア $\vec{\psi}$ と $\vec{\phi}$ に対して，行列要素 $\langle\vec{\psi},\widehat{A}\vec{\phi}\rangle$ が次の積分で書ける．

$$\langle\vec{\psi},\widehat{A}\vec{\phi}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a\, d_a\langle\vec{\psi},\widehat{E}_a\vec{\phi}\rangle. \tag{6.15}$$

もし $\langle\vec{\psi},\widehat{E}_a\vec{\phi}\rangle$ が微分可能な $a \in \mathbb{R}$ の関数であれば，表示 $d_a\langle\vec{\psi},\widehat{E}_a\vec{\phi}\rangle$ は $\frac{d}{da}\langle\vec{\psi},\widehat{E}_a\vec{\phi}\rangle\, da$ のように理解できて，式 (6.15) の右辺は普通の積分である．もし $\langle\vec{\psi}(\widehat{E}_a\vec{\phi})\rangle$ が微分可能でないならば，式 (6.15) はスティルチェス積分として解釈しなければならない．

注意すれば，それぞれの実数区間[3] $[b,c](b < c)$ に対して，射影作用素が，

$$\widehat{E}_{[b,c]} := \int_b^c d\widehat{E}_a \tag{6.16}$$

[3] 記号 $[b,c]$ は，全ての実数 $a \in \mathbb{R}$ のうち $b \leq a \leq c$ であるものの集合を意味する．

によって定義できる．この作用素は，$\widehat{A}$ の固有値 a が区間 $[b,c]$ に位置する状態の部分空間に射影する．物理的には，A の測定がこの区間に位置している結果を生ずる確率は，

$$\mathrm{Prob}(A \in [b,c];\, |\psi\rangle) = \langle\psi|\, \widehat{E}_{[b,c]}\, |\psi\rangle \tag{6.17}$$

である．しかし，これが厳密な不等式 $b < c$ を要求する点に注意しよう．1つだけの固有値に対応する固有空間の上への射影作用素は存在しない．特に，$\widehat{A}$ の固有ベクトルで，$\widehat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle$ であるような $\mathcal{H}$ のベクトル $|a\rangle$ は存在しない．

固有ベクトル $|a\rangle$ がある意味で存在しなければならないと単に仮定したDirac は，連続スペクトルを持つ作用素に対するいくぶん異なる方法を採用した．この考えの完全に数学的な実現は，rigged Hilbert 空間，つまり Gel'fand の3つ組み $\{\Phi, \mathcal{H}, \Phi'\}$ によっており，そこでは，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は，それ自身はヒルベルト空間でないベクトル空間 Φ' の，線形部分空間として位置付けられる．連続スペクトルに付随する固有ベクトルは，Φ' のベクトルではあるが，部分空間 $\mathcal{H}$ の要素ではない．空間 Φ' は(節 2.5.2 参照)$\mathcal{H}$ の部分空間であるもう一つのベクトル空間 Φ の，一種の双対として構成される．従って，$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi'$ である．

以上の完全な扱いはかなり微妙であるが，ほとんどの物理学者はベクトル $|a\rangle$ が存在するとみなして，不都合なく議論している．そして，Dirac によって設定された以下の発見的な規則によって，それらを扱っていっている：(以下単純化のために，$\widehat{A}$ には縮退した固有値が無いと仮定しよう．)

(i) 連続するある範囲 $\alpha \le a \le \beta$(α と β は，それぞれ $-\infty$ と ∞ でありうる) で，a が $\widehat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle$ を満たせば，固有ベクトル $|a\rangle$ は，ディラック δ 関数 (もちろん，それは厳密な意味での「純正な」関数ではない) に関して正規直交化される:

$$\langle a|b\rangle = \delta(a-b) \tag{6.18}$$

ここで，任意の関数 f に対して $\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(a-b)\,da = f(b)$ である．これらは，離散的な場合の $\langle a_n|a_m\rangle = \delta_{nm}$ と $\sum_n f_n\delta_{nm} = f_m$ に対応する．

(ii) $\mathcal{H}$ の任意のベクトルは，これら一般化された固有ベクトルによって展開できる：

$$|\psi\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(a)\,|a\rangle\,da \tag{6.19}$$

ここで展開係数は，関数 ψ から

$$\psi(a) := \langle a|\psi\rangle \tag{6.20}$$

によって定義される．これらは離散的な場合の $|\psi\rangle = \sum_m \psi_m\,|a_m\rangle$ に対応する．そこでは，展開係数は $\psi_m := \langle a_m|\psi\rangle$ であった．1 の分割，式 (3.22) とスペクトル表現，式 (3.54) に対応した表現がある．

(iii) もし $|\psi\rangle = \int_\alpha^\beta \psi(a)\,|a\rangle\,da$ および $|\phi\rangle = \int_\alpha^\beta \phi(b)\,|b\rangle db$ ならば，発見法的に

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= \int_\alpha^\beta\!\!\int_\alpha^\beta \psi^*(a)\phi(b)\langle a|b\rangle\,da\,db = \int_\alpha^\beta\!\!\int_\alpha^\beta \psi^*(a)\phi(b)\delta(a-b)\,da\,db \\ &= \int_\alpha^\beta \psi^*(a)\phi(a)\,da \end{aligned} \tag{6.21}$$

であり，これは離散的な場合の $\langle\psi|\phi\rangle = \sum_n \psi_n^*\phi_n$ に対応する．特に，

$$\|\vec{\psi}\|^2 = \int_\alpha^\beta |\psi(a)|^2\,da \tag{6.22}$$

である．そして，この積分が有限であるような関数 $\psi(a)$ に対して，式 (6.19) の「波束」は物理的に実現可能な状態に対応する．

(iv) 縮退を無視すれば，重要な結果，式 (5.29) に対応して，観測量 A の測定が，範囲 $[b,c]$ に位置している結果を生ずる確率は

$$\mathrm{Prob}(A \in [b,c];\,|\psi\rangle) = \int_b^c |\langle a|\psi\rangle|^2\,da \tag{6.23}$$

となる．連続固有ベクトル $|a\rangle$ は，フォン・ノイマンのスペクトル射影作用素 $\widehat{E}_a$ と，発見法的な式

$$d\widehat{E}_a = |a\rangle\langle a|\,da \tag{6.24}$$

によって対応している．これは，発見法的な式 (6.23) と数学的に厳密な式 (6.17) を整合させている．$\widehat{A}$ のスペクトルが連続および離散的な部分を持てば，和と積分が両方必要であるが，ここでは詳細には立ち入らない．

6.3 両立する観測量

量子論の意味の議論において，2 つの物理量 A と B がお互いに両立するかどうかという問題に対する研究報告が多数ある．両立とは，物理量 A と B を同時に測定できる，あるいはより実在論の解釈では，物理量 A と B が同時に値を持つことができる，という条件である．

そのような条件は，古典力学では自明である．つまり状態 $s \in \mathcal{S}$ での A の値が $f_A(s)$ であるように，各物理量 A に状態空間 $\mathcal{S}$ の上の実数値関数 f_A を対応させられるのは本来的な性質である．量子論での状況は全く異なり，以下に見るように，複数の観測量の非両立性は，理論の直接の帰結である．もちろんそのような議論の前に,「同時測定」ということをはっきり定義しなければならない．例えば，どんな測定でも，微小かもしれないが有限の時間を要する．2 つの観測量 A と B の測定は，もしそれらの観測時間が単に部分的に重なっているときにも同時測定とみなすのだろうか？A と B が同時に測定できるということは，B の測定の後直ちに A の測定をした結果と，A と B の順番を入れ替えて同じ測定をしたときの結果が同じである，とするのがもっと有用な定義であるだろう．またいずれの場合も，同時性の概念が座標系による，という特殊相対性理論の要請が満たされるかどうかという懸念もある．

この節では，我々は主に両立性の考えと関連する技術的な側面に専念しよう．概念上の問題に巻き込まれることなく，特定の型の測定は明らかに同時であるとみなせるという事実は特に面白い．例えば，電子を蛍光面に当て，面上に直交 xy 座標を張り，電子が当たった xy 座標を測定することを考えてみよう．蛍光体の点に番号が割り振られていれば，どの点に当たったか（すなわちその割り振り番号）を見て，その点の xy 座標を知ることができる．このように，それは電子の観測量 x と y の同時測定を構成

する．一般に，$A = \mathcal{F}(C)$ および $B = \mathcal{G}(C)$ となるような第三の観測量 C と関数 $\mathcal{F}$ および $\mathcal{G}$ があれば，2 つの観測量 A と B は**自明に両立する**と言う．上の場合はこの特別な場合である．このように，C の一つの測定によって，A と B の数値が決定されるのである．関数形を保存する量子化条件，式 (5.14)(それは，ここで仮定する) は，$\widehat{A} = \mathcal{F}(\widehat{C})$ 及び $\widehat{B} = \mathcal{G}(\widehat{C})$ を意味し，従って

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0 \tag{6.25}$$

を意味する．これは，ある自己共役作用素のどんな 2 つの関数もお互いと交換するというスペクトル定理の直接の帰結から言える．[演習]

一対の観測量がこの意味で自明に両立する条件を知ることは重要である．すなわち，それら両方が第三の量の関数である条件は何だろうか？ここで重要な数学的結果は，式 (6.25) を導いた論理の逆が，以下の意味で真であるということである．

定理

$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ は $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ をみたす一対の自己共役作用素であるとしよう．すると，第三の自己共役作用素 $\widehat{C}$ と関数 $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ があって，$\widehat{A} = \mathcal{F}(\widehat{C})$ と $\widehat{B} = \mathcal{G}(\widehat{C})$ をみたす．

証明

両方の作用素とも離散スペクトルを持つ場合の証明の概略は次の通りである．

$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ のスペクトル表現を

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \sum_{i=1}^{M_A} a_i \widehat{P}_i, \\ \widehat{B} &= \sum_{j=1}^{M_B} b_j \widehat{Q}_j, \end{aligned} \tag{6.26}$$

と書く．$\{a_1, a_2, \ldots, a_{M_A}\}$ と $\{b_1, b_2, \ldots, b_{M_B}\}$ は，それぞれ $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ の固有値である．ここで，$[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ は，任意の i と j に対して，(i) $[\widehat{A}, \widehat{Q}_j] = 0$，(ii) $[\widehat{P}_i, \widehat{B}] = 0$ および (iii) $[\widehat{P}_i, \widehat{Q}_j] = 0$ を意味することをすぐ示せる (巻末問題 16 参照)．

$\widehat{P}_i\widehat{Q}_j = \widehat{Q}_j\widehat{P}_i$ から，$(\widehat{P}_i\widehat{Q}_j)^\dagger = \widehat{Q}_j\widehat{P}_i = \widehat{P}_i\widehat{Q}_j$，すなわち，作用素 $\widehat{P}_i\widehat{Q}_j$ は自己共役である．さらに，

$$(\widehat{P}_i\widehat{Q}_j)^2 = \widehat{P}_i\widehat{Q}_j\widehat{P}_i\widehat{Q}_j = \widehat{P}_i\widehat{Q}_j\widehat{Q}_j\widehat{P}_i = \widehat{P}_i\widehat{Q}_j\widehat{P}_i = \widehat{P}_i\widehat{P}_i\widehat{Q}_j = \widehat{P}_i\widehat{Q}_j \tag{6.27}$$

であり，従って，各 i と j に対して $\widehat{P}_i\widehat{Q}_j$ は射影作用素である．もちろん，あるものは消えるかもしれないので，$S(\widehat{A},\widehat{B})$ を $\widehat{P}_i\widehat{Q}_j \neq 0$ である対 ij の組の部分集合として定義する．すると，$\{c_{ij} \mid (i,j) \in S(\widehat{A},\widehat{B})\}$ が実数のどんな数の集合であっても，自己共役作用素 $\widehat{C}$ が

$$\widehat{C} := \sum_{i,j\in S(\widehat{A},\widehat{B})} c_{ij}\widehat{P}_i\widehat{Q}_j. \tag{6.28}$$

によって定義される．$\sum_{j=1}^{M_B}\widehat{Q}_j = \widehat{\mathbb{1}}$ なので，各 i に対して $\widehat{P}_i\widehat{Q}_j \neq 0$ である j が少なくとも一つ存在することに注意しよう．

さて，零ではなくて，お互いに異なる数の集合 $\{c_{ij} \mid (i,j) \in S(\widehat{A},\widehat{B})\}$ を選び，任意の $i,j \in S(\widehat{A},\widehat{B})$ に対して $\mathcal{F}(c_{ij}) := a_i$ によって最初に集合 $\{c_{ij}\}$ の上で $\mathcal{F}$ を定義しよう．そして，この集合以外はこの $\mathcal{F}$ を任意に内挿することにより，関数 $\mathcal{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を構成する．各 i に対して $c_{ij}\neq 0$ となる少なくとも 1 つの引数 j があるので，あらゆる a_i，$i=1,2,\ldots,M_A$ は，$\mathcal{F}$ の値域である．それで，$\widehat{C}$ の定義式 (6.28) から $\widehat{A} = \mathcal{F}(\widehat{C})$ となる．

同じように，任意の c_{ij} に対して $\mathcal{G}(c_{ij}) = b_j$ となるように，関数 $\mathcal{G}$ を定義することができる．従って，$\widehat{B} = \mathcal{G}(\widehat{C})$ となる． **証明終り**

射影作用素 $\widehat{P}_i\widehat{Q}_j$ の詳細を更に見ていこう．特に，$|\psi\rangle$ が $\mathcal{H}$ の任意のベクトルならば，$\widehat{A}\widehat{P}_i\widehat{Q}_j\,|\psi\rangle = a_i\widehat{P}_i\widehat{Q}_j\,|\psi\rangle$($A\widehat{P}_i = a_i\widehat{P}_i$ だから) であり，$\widehat{B}\widehat{P}_i\widehat{Q}_j\,|\psi\rangle = \widehat{P}_i\widehat{B}\widehat{Q}_j\,|\psi\rangle = b_j\widehat{P}_i\widehat{Q}_j\,|\psi\rangle$($[\widehat{B},\widehat{P}_i] = 0$，$\widehat{B}\widehat{Q}_j = b_j\widehat{Q}_j$ だから) である．このように，$\widehat{P}_i\widehat{Q}_j\,|\psi\rangle$ の形のベクトルは，固有値 a_i と b_j を持つ作用素 $\widehat{A}$ および $\widehat{B}$ の同時固有ベクトルである．

ベクトルの集合 $\{\widehat{P}_i\widehat{Q}_j\,|\psi\rangle|$ ただし $|\psi\rangle \in \mathcal{H}\}$ は，射影作用素 $\widehat{P}_i\widehat{Q}_j$ の固有値 1 の固有空間である．そして，この部分空間の正規直交基底は $|a_i, b_j, k\rangle$ である．ここで，$k = 1,2,\ldots,d(i,j)$ は固有値 a_i と b_j に対する縮退のラベルである．すなわち，$d(i,j)$ は固有空間の次元である．すべて

の i と j に対しての基底を集めれば，それは全ヒルベルト空間の基底を与え，どんなベクトル $|\psi\rangle$ も次のように展開できる．

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j\in S(\widehat{A},\widehat{B})} \sum_{k=1}^{d(i,j)} \psi_{ijk}\,|a_i, b_j, k\rangle. \tag{6.29}$$

さて，作用素 $\widehat{A}$ に関して，固有値 a_i に対する縮退した固有状態は，部分的に $\widehat{B}$ の固有値と，部分的に k によってラベルされる．このことは，k が，$\widehat{A}$ 及び $\widehat{B}$ と交換する第 3 の作用素の固有値に関係があるかもしれないという問題を提起する．その答は，以下の定理に含まれる:

定理

任意のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の上には，お互いに交換する自己共役作用素 $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_r$ の有限集合があり，それらの同時固有ベクトルは $\mathcal{H}$ の，縮退の無い基底を張る．お互いに交換する，縮退を残した任意の自己共役作用素の集合は，それらと交換する作用素の有限集合を加えることによって，非縮退となる．

解説

1. 任意の $|\psi\rangle \in H$ は，付随する同時固有ベクトル $|a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}\rangle$ (つまりこれらは $\widehat{A}_k\,|a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}\rangle = a_{ki_k}\,|a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}\rangle$ を満たす) によって展開できる:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_r} \psi_{i_1,i_2,\ldots,\,i_r}\,|a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}\rangle. \tag{6.30}$$

ここで，展開係数は

$$\psi_{i_1,i_2,\ldots,i_r} = \langle a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots,\, a_{ri_r}|\psi\rangle \tag{6.31}$$

であり，式 (6.30) の和は作用素 $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_r$ の固有値の上でとる．

2. 基本的確率の規則，式 (5.29) は次のようになる．状態ベクトルが $|\psi\rangle$ であるとき，自明に両立する観測量 $A_1, A_2, \ldots, A_r$ の同時測定がなさ

れれば，結果が $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}$ である確率は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(A_1 &= a_{1i_1}, A_2 = a_{2i_2}, \ldots, A_r = a_{ri_r}; |\psi\rangle) \\
&= \left|\langle a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}|\psi\rangle\right|^2 \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

となる．これは混合状態を含む明らかな一般化である．

3. Dirac は，この非縮退の作用素の集合を**完全交換集合**と呼んだ．量子状態ベクトル $|a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}\rangle$ によって記述される個々の量子系は，観測量 $A_1, A_2, \ldots, A_r$ に対して同時に値 $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}$ を**所有する**ということが意味を持つことに注意しよう．

4. 典型的な例は，水素原子の状態ベクトル $|nlm\lambda\rangle$ である．これらは，ハミルトニアン $\widehat{H}$，全体の角運動量 $\widehat{L}\cdot\widehat{L}$，角運動量の z-成分 $\widehat{L}_z$ と，電子のスピン作用素の z-成分 $\widehat{S}_z$ の，同時固有ベクトルである．固有値は

$$
\begin{aligned}
\widehat{H}\,|nlm\lambda\rangle &= E_n\,|nlm\lambda\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots && (6.33)\\
\widehat{L}\cdot\widehat{L}\,|nlm\lambda\rangle &= l(l+1)\hbar^2\,|nlm\lambda\rangle, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1 && (6.34)\\
\widehat{L}_z\,|nlm\lambda\rangle &= m\hbar\,|nlm\lambda\rangle, \quad m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l && (6.35)\\
\widehat{S}_z\,|nlm\lambda\rangle &= \lambda\hbar\,|nlm\lambda\rangle, \quad \lambda = \pm\tfrac{1}{2}. && (6.36)
\end{aligned}
$$

この数学的議論の物理的結論は，観測量 A と B が，それらを表す作用素がお互いに交換する場合に限り，**自明に両立する**ということである．より一般には，これはお互いに交換する自己共役作用素 $\{\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_k\}$ のどんな有限集合にもあてはまる．しかし，交換しない自己共役作用素がたくさんあり，従って，自明に両立しない観測量が多くある．そのような自明には両立しない観測量であっても，何らかの意味で同時測定可能な観測量というのは無いのだろうか？もちろん，これは「同時に測定される」という意味による．フォン・ノイマンは，慎重にこの問題を研究して，観測量 A と B が同時に測定できるならば，それらに付随する量子作用素が交換する (すなわち $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$) という結論に達した．彼の仮説は 3 つだ

けである：(i) すでに述べた量子論の一般的な規則，(ii) 関数保存の条件式 (5.14)，そして (iii) 同時測定結果の確率予測が個々の測定結果のそれと一致すること．この意味は以下のようである．簡単のために，$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ の固有値が離散的であるとしよう．そして，A と B の両測定において，それぞれ結果 a_i と b_j が得られる確率を $\mathrm{Prob}(A = a_i, B = b_j; \vec{\psi})$ としよう．ただし $i = 1, 2, \ldots, M_A$，$j = 1, 2, \ldots, M_B$ である．そして，フォン・ノイマンの整合性の条件は，

$$\sum_{j=1}^{M_B} \mathrm{Prob}(A = a_i, B = b_j; \vec{\psi}) = \mathrm{Prob}(A = a_i; \vec{\psi}) \qquad (6.37)$$

$$\sum_{i=1}^{M_A} \mathrm{Prob}(A = a_i, B = b_j; \vec{\psi}) = \mathrm{Prob}(B = b_j; \vec{\psi}) \qquad (6.38)$$

である．すなわち，同時確率に付随する片方の確率は，単一量の確率と等しいことである．この方向の議論は，強力な帰結 (von Neumann 1971) に至る:

> 『2つの観測量 A と B が同時に測定できるための必要十分条件は，それらを表す作用素が $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ を満たさなければならないことである.』

例えばこれは，質点の位置と運動量の同時測定を行うことは不可能なことを意味する．そのような見方はたいてい支持されるが，5.2節で議論されたように，非可換量の同時測定が可能なように**測定**を解釈した研究報告 (Park & Margenau (1968)) によって強く批判された．彼らは，条件 $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ を置く代わりに，ある特定の観測量だけが自己共役作用素によって表される，というように量子論の規則2を弱めることで，von Neumann 定理の成立を避けたのである．

非可換な観測量の同時測定の概念全体は，明らかに潜在的な曖昧性に満ちている．従って同時測定は，自明に両立する観測量の場合に限るのが安全である．7.3節では，通念とは裏腹に不確定性関係 $\triangle x \triangle p \geq \hbar/2$ は道具論の方法においては，同時測定の概念とまったく関係なく意味を持つ，ということを議論する．

6.4 時間発展

6.4.1 決定論的発展

5.1 節で述べた第 4 の量子規則は，量子状態が時間的にどのように発展するかを記述する．シュレーディンガー方程式 (5.2) について，まずそれが線形であることに注目しよう．従って，$\vec{\psi}_{t_1}$ と $\vec{\phi}_{t_1}$ が，時間 $t - t_1$ の間に，それぞれ $\vec{\psi}_t$ と $\vec{\phi}_t$ に発展するなら，$\alpha\vec{\psi}_{t_1} + \beta\vec{\phi}_{t_1}$ は状態 $\alpha\vec{\psi}_t + \beta\vec{\phi}_t$ に発展する．

シュレーディンガー方程式の第二の決定的な性質は，それが時間の 1 次微分方程式であるということである．従って，時刻 t_1 に与えられた任意の状態から，どんな後の (あるいは以前の) 時刻 t においても，唯一に状態が決定する．このように，量子論は 4.2 節で記述された一般的な意味での決定論的構造を持つ．

このことを明確にするために，式 (5.2) を Dirac 記号で書き直して

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi_t\right\rangle = \widehat{H}\left|\psi_t\right\rangle \tag{6.39}$$

から出発しよう．ここで $|\psi_t\rangle$ は時刻 t の状態を示す．この微分方程式の正確な意味は，任意のベクトル $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ に対して，複素数 $\langle\phi|\psi_t\rangle$ が常微分方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\phi|\psi_t\rangle = \langle\phi|\,\widehat{H}\,|\psi_t\rangle \tag{6.40}$$

を満たすということである．ハミルトニアン作用素 $\widehat{H}$ が離散固有値 $\{E_1, E_2, \ldots, E_M\}$ を持ち，付随するスペクトル表現が

$$\widehat{H} = \sum_{i=1}^{M} E_m \widehat{P}_m \tag{6.41}$$

であるとしよう．すると，式 (6.40) は

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\phi|\psi_t\rangle = \sum_{m=1}^{M} E_m\,\langle\phi|\,\widehat{P}_m\,|\psi_t\rangle \tag{6.42}$$

と書き直される．ここで $\widehat{P}_m$ は，固有値 E_m に対応する $\widehat{H}$ の固有空間上への射影である．

さて，任意の $|\phi\rangle$ に対して式 (6.42) が成立するので，それは特に $\widehat{P}_n|\chi\rangle$ の形のベクトルにも当てはまり，任意の $\langle\chi|$ に対して，

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\chi|\widehat{P}_n|\psi_t\rangle = \sum_{m=1}^{M} E_m\langle\chi|\widehat{P}_n\widehat{P}_m|\psi_t\rangle \tag{6.43}$$

となる．スペクトルの射影作用素 $\widehat{P}_n$ は等式 $\widehat{P}_n\widehat{P}_m = \delta_{mn}\widehat{P}_n$ を満たすので，式 (6.43) は微分方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\chi|\widehat{P}_n|\psi_t\rangle = E_n\langle\chi|\widehat{P}_n|\psi_t\rangle \tag{6.44}$$

になる．ここで，$n = 1, 2, \ldots, M$ であり，$|\chi\rangle \in \mathcal{H}$ は任意である．これらの 1 次微分方程式はすぐ解けて，ある時刻 t_1 の値が知れれば，時刻 t_2 での行列要素 $\langle\chi|\widehat{P}_n|\psi_{t_2}\rangle$ の値を与える．結果は，

$$\langle\chi|\widehat{P}_n|\psi_{t_2}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2-t_1)}\langle\chi|\widehat{P}_n|\psi_{t_1}\rangle \quad n = 1, 2, \ldots, M \tag{6.45}$$

である．これを展開

$$\langle\chi|\psi_{t_2}\rangle = \sum_{m=1}^{M}\langle\chi|\widehat{P}_m|\psi_{t_2}\rangle \tag{6.46}$$

に用いると

$$\langle\chi|\psi_{t_2}\rangle = \sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t_2-t_1)}\langle\chi|\widehat{P}_m|\psi_{t_1}\rangle \tag{6.47}$$

を得る．これが全ての $\langle\chi|$ に当てはまるので，時刻 t_1 での状態を用いて，時刻 t_2 での状態

$$|\psi_{t_2}\rangle = \sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t_2-t_1)}\widehat{P}_m|\psi_{t_1}\rangle \tag{6.48}$$

を得る．$\widehat{H}$ のスペクトル表現の式 (6.41) に適用される自己共役作用素の関数の定義式 (5.28) を用いて，式 (6.48) は

$$|\psi_{t_2}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t_2-t_1)}\,|\psi_{t_1}\rangle \tag{6.49}$$

と簡潔に書ける．このように，時刻 t_2 の状態は，線形作用素

$$\widehat{U}(t_2,t_1) := e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t_2-t_1)} \tag{6.50}$$

をそれに作用することによって，他の任意の時刻 t_1 の状態 $|\psi_{t_1}\rangle$ から構成される．これは「ユニタリー」作用素の例であり，その一般的な定義は 7.1 節で与えられる．

これらの結果は，$\widehat{H}$ が連続スペクトルを持つ場合や，時間に依存したハミルトニアン作用素の場合に一般化できる．全ての場合に，式 (6.49) は，状態の量子力学的時間発展が，4.2 節で議論された一般的なパターンに従うことを示す．この意味で，量子論は古典物理学と同じく決定論的である．はるかに問題になる時間発展は，観測量の測定に伴うとされる，状態ベクトルの急激な変化である．このいわゆる状態ベクトルの「収縮」は，8.3 節で議論される．

6.4.2　簡単な例

時間発展に関する基本概念を，単純な 2×2 行列のモデルで示そう．

問題

電子の特定の力学的自由度がハミルトニアン作用素

$$\widehat{H} = \widehat{\mathbb{1}} + \alpha\sigma_y$$

によって記述されるとしよう．ここで，α はある実数，σ_y はパウリ・スピン行列 $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ であり，$\widehat{\mathbb{1}}$ は 2×2 単位行列である．

(i)　この観測量を測定したら，どのような結果が可能だろうか？

(ii) ある時刻 $t = 0$ の状態ベクトルが $|\psi\rangle = \binom{1}{0}$ であるとき，後の時刻 t ではどうなるか？

(iii) S_z のいろいろな測定結果を得る確率は，時間に依存するか？

解答

(i) $\widehat{H} = \widehat{\mathbb{1}} + \alpha\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & -i\alpha \\ i\alpha & 1 \end{pmatrix}$ であり，量子論の規則によって，観測量を測定した結果は，この作用素の固有値のひとつになる．これらは，特性方程式 $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -i\alpha \\ i\alpha & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ の解 λ である．つまり $(1-\lambda)^2 - \alpha^2 = 0$ であり，$\lambda = 1 \pm \alpha$ となる．

(ii) どんな状態の時間発展も，時間に依存したシュレーディンガー方程式 $i\hbar\frac{d\,|\psi_t\rangle}{dt} = \widehat{H}\,|\psi_t\rangle$ を満たし，今の場合は，

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i\alpha \\ i\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ は時刻 t での状態である．従って，

$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) - i\alpha b(t) \\ i\alpha a(t) + b(t) \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad \begin{matrix} i\hbar\dot{a}(t) = a(t) - i\alpha b(t) \\ i\hbar\dot{b}(t) = i\alpha a(t) + b(t) \end{matrix}$$

を意味する．まとめ直して，$i\hbar\frac{d}{dt}(a+ib) = (1-\alpha)(a+ib)$，$i\hbar\frac{d}{dt}(a-ib) = (1+\alpha)(a-ib)$ となる．これらの方程式の解は

$$a + ib = Ae^{-it(1-\alpha)/\hbar}, \quad \text{および} \quad a - ib = Be^{-it(1+\alpha)/\hbar}$$

である．ここで $A := (a+ib)|_{t=0}$，$B := (a-ib)|_{t=0}$ とした．

初期条件が $|\psi_{t=0}\rangle = \binom{1}{0}$ なので，$a(0) = 1$，$b(0) = 0$ となる．よって，$A = B = 1$，そして，$a(t) = e^{-it/\hbar}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}$，$b(t) = e^{-it/\hbar}\sin\frac{\alpha t}{\hbar}$．このように，時間 t の後，状態 $\binom{1}{0}$ は

$$|\psi_t\rangle = e^{-it/\hbar}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha t}{\hbar} \\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar} \end{pmatrix}$$

となる．

別解

固有値 $1+\alpha$ と $1-\alpha$ にそれぞれ対応している $\widehat{H}$ の固有ベクトル $\binom{1}{i}$ と $\binom{1}{-i}$ に関して，$\binom{1}{0}$ を展開すると，$\binom{1}{0}=\frac{1}{2}\binom{1}{i}+\frac{1}{2}\binom{1}{-i}$ となる．すると $|\psi_t\rangle = e^{-it\widehat{H}/\hbar}|\psi_0\rangle$ は，今の場合

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto |\psi_t\rangle \;=\; \frac{1}{2}e^{-it\widehat{H}/\hbar}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-it\widehat{H}/\hbar}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}e^{-it(1+\alpha)/\hbar}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-it(1-\alpha)/\hbar}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

となる．ここで，自己共役作用素の関数の定義を利用した．このように，

$$|\psi_t\rangle = e^{-it/\hbar}\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}$$

となり，前の答えと同じになる．

(iii) 異なる可能な結果を得る確率は，上で議論した規則 3 に代わるものを利用して計算される．ベクトル $\binom{1}{0}$ と $\binom{0}{1}$ をそれぞれ $\langle\uparrow|$ と $\langle\downarrow|$ と書いて，

$$\mathrm{Prob}(S_z = \frac{\hbar}{2};\, |\psi_t\rangle) = |\langle\uparrow|\psi_t\rangle|^2 = \left|\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 = \cos^2\frac{\alpha t}{\hbar}$$

となり，そして，

$$\mathrm{Prob}(S_z = -\frac{\hbar}{2};\, |\psi_t\rangle) = |\langle\downarrow|\psi_t\rangle|^2 = \left|\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 = \sin^2\frac{\alpha t}{\hbar}.$$

予期されるように，これら 2 つの確率の和は 1 になる．

6.4.3 保存量

式 (6.49) をうまく応用する好い例は，保存量の理論である．古典力学では，物理量 $A(x,p)$ が保存されるとは，時間によって点 $(x(t),p(t))$ が状態空間を動いても，その値が変化しないことを意味する．それはつまり，

$$0=\frac{dA\bigl(x(t),p(t)\bigr)}{dt}\equiv\frac{\partial A(x,p)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial A(x,p)}{\partial p}\frac{dp(t)}{dt} \tag{6.51}$$

を意味する．

量子論においては，観測量が特定の値を「持っている」というのは通常意味が無いので，そのような定義は使われない．むしろ，典型的状態は，関連する作用素の固有状態の線形結合である．しかし，最初のある時刻 $t=0$ に系の状態が $\widehat{A}$ の固有状態 $|a\rangle$ で**ある**なら，時間発展させたときに，$\widehat{A}$ の同じ固有値の固有状態であるかどうかについて考えるのは意味がある．すなわち，$\widehat{A}\,|a\rangle=a\,|a\rangle$ として，

$$|a,t\rangle:=e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\,|a\rangle \tag{6.52}$$

に興味がある．与えられたベクトルが，ある作用素の固有ベクトルかどうかを確認するには，単に作用素をそれに作用させてどうなるかを見ればよい．今の場合には，この計算は以下のようになる：

$$\begin{aligned}\widehat{A}\,|a,t\rangle &= \widehat{A}e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\,|a\rangle=[\,\widehat{A},\,e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\,]\,|a\rangle+e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\widehat{A}\,|a\rangle\\ &= [\,\widehat{A},\,e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\,]\,|a\rangle+ae^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\,|a\rangle\\ &= [\,\widehat{A},\,e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\,]\,|a\rangle+a\,|a,t\rangle.\end{aligned} \tag{6.53}$$

これから，対応する作用素がハミルトニアンと交換すれば，量子論での観測量 A が**保存される**と言えそうである．実際，

$$[\widehat{A},\widehat{H}]=0 \tag{6.54}$$

であれば，任意の関数 $\mathcal{F}(\widehat{H})$ に対して $[\,\widehat{A},\mathcal{F}(\widehat{H})\,]=0$ が言えるから，特に，$[\,\widehat{A},e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\,]=0$ となる．従って式 (6.53) により

$$\widehat{A}\,|a,t\rangle = a\,|a,t\rangle \tag{6.55}$$

なので，$|a,t\rangle$ は初期状態 $|a\rangle = |a,0\rangle$ と同じ固有値 a に対する $\widehat{A}$ の固有ベクトルである．この場合，系によって所有される A の値 a が**保存される**と言う．固有値 a が非縮退ならば $|a,t\rangle$ は，複素数のある位相因子を $\beta(t)$ として，$\beta(t)\,|a\rangle$ に等しくなければならない点に注意しよう．しかし，固有値 a が縮退していれば，上記の定理によって，$|a,t\rangle$ はこの固有値の固有ベクトルの固有空間内にある．

6.4.4 混合状態の時間発展

最後に，時間に依存したシュレーディンガー方程式 (6.39) を混合状態に対して拡張する方法について考えよう．密度行列 $\widehat{\rho}$ が一つの射影作用素 $|\psi\rangle\langle\psi|$ だけである特別な場合を考察することから始めよう．式 (6.49) によって与えられるケット $|\psi\rangle$ の時間発展は，射影作用素 $\widehat{\rho}(t_1) := |\psi_{t_1}\rangle\langle\psi_{t_1}|$ の時間発展が

$$\widehat{\rho}(t_1) \mapsto \widehat{\rho}(t) := e^{\frac{-i}{\hbar}\widehat{H}(t-t_1)}\,\widehat{\rho}(t_1)\,e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t-t_1)} \tag{6.56}$$

であることを意味する．どんな密度行列も，この型の射影作用素のアフィン和として書けるので，時間発展がこのアフィン構造を保存すると仮定 (これは**仮定**である) するならば，一般の密度行列 $\widehat{\rho}$ の発展も式 (6.56) によって記述される．

時間 t に関して式 (6.56) の両側を微分することによって，有用な式が生じる．$\widehat{H}$ にスペクトル定理を利用すれば，これは $\widehat{\rho}$ の時間発展を記述する次の微分方程式を与える:

$$i\hbar\frac{d\widehat{\rho}(t)}{dt} = [\,\widehat{H},\widehat{\rho}(t)\,]. \tag{6.57}$$

これは，純粋状態に対する時間に依存したシュレーディンガー方程式 (6.39) の直接の拡張である．

第7章　量子論でのユニタリー作用素

7.1　ユニタリー作用素

自己共役作用素の次に，量子論で重要な作用素は，ユニタリーであるものである．実際に我々は，時間発展作用素の式 (6.50) に，既に1例を見た．ユニタリー作用素は，物理系に**対称性**があるときはいつでも自然に現れ，それは通常いろいろな構造を不変にする変換群の形をとる．そのような群は，系の内部的性質 (例えば強い相互作用，ハドロン物理学の $SU2$ または $SU3$ 対称性) と関連していたり，系が存在する時間空間の特別な性質に由来していたりする．後者の好い例は，特殊相対性理論においてミンコフスキー時空の距離線素を不変にする Poincaré 群である．

このタイプの群の演算は，量子論，素粒子物理学，相対論的な場の量子論，原子や分子のスペクトル，結晶格子の構造などにおいて重要である．後に議論するが，対称性の考えは，正準交換関係 $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar\widehat{\mathbb{1}}$ の正当化も与え，これは時間空間の明確な形や初等波動力学の作用素を決定する．

ユニタリー作用素は，ベクトルの長さと「角度」を保存するものである．それはベクトル解析での**回転**の考えと類似している．より正確に言うと次のようになる：

定義　次の条件を満たせば，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の作用素 $\widehat{U}$ はユニタリーである．(i) 可逆である．そして，(ii) それは全てのスカラー積を保存する．つまり任意の $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \widehat{U}\vec{\psi}, \widehat{U}\vec{\phi} \rangle = \langle \vec{\psi}, \vec{\phi} \rangle. \tag{7.1}$$

解説

1. 可逆性の要求及び式 (7.1) は

$$\widehat{U}\widehat{U}^\dagger = \widehat{U}^\dagger\widehat{U} = \widehat{\mathbb{1}} \tag{7.2}$$

と同値である [演習問題]．従ってこれをユニタリー性の別の定義とすることができる．

2. ベクトルのノルムは，$\|\widehat{U}\vec{\psi}\|^2=\langle\widehat{U}\vec{\psi},\widehat{U}\vec{\psi}\rangle=\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle=\|\vec{\psi}\|^2$ なので保存される．

3. 作用素の条件 $\widehat{\mathbb{1}} = \widehat{U}\widehat{U}^\dagger$ と $\widehat{\mathbb{1}} = \widehat{U}^\dagger\widehat{U}$ は，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_N\rangle\}$ に関して定義される $\widehat{U}$ の行列要素 $U_{ij} := \langle e_i|\widehat{U}|e_j\rangle$ に対する条件を与える．例えば，式 $\widehat{\mathbb{1}} = \widehat{U}\widehat{U}^\dagger$ の行列要素をとって

$$\begin{aligned}\langle e_i|e_j\rangle &= \langle e_i|\widehat{U}\widehat{U}^\dagger|e_j\rangle = \sum_{k=1}^{N}\langle e_i|\widehat{U}|e_k\rangle\langle e_k|\widehat{U}^\dagger|e_j\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{N}\langle e_i|\widehat{U}|e_k\rangle\langle e_j|\widehat{U}|e_k\rangle^*\end{aligned} \tag{7.3}$$

であり従って，

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{N} U_{ik}\, U_{jk}^* \tag{7.4}$$

となる．$\widehat{\mathbb{1}} = \widehat{U}^\dagger\widehat{U}$ についても同様である．このように，$\widehat{U}$ を表現する行列は，普通の意味でのユニタリー行列である．

自己共役作用素に対する 3.3 節の主要な結果はすべて，ユニタリーな場合にも類似している．特に:

定理

1. ユニタリーな作用素 $\widehat{U}$ の固有値は，絶対値 1 の複素数である．

2. 異なる固有値に対する固有ベクトルはお互いに直交する．

証明

1. $\widehat{U}\vec{u} = a\vec{u}$ であるとすると，

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle \widehat{U}\vec{u}, \widehat{U}\vec{u} \rangle = \langle a\vec{u}, a\vec{u} \rangle = a^* a \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \tag{7.5}$$

は $\|\vec{u}\| \neq 0$ なので $a^* a = 1$ を意味する．

2. $\widehat{U}\vec{u_1} = a_1 \vec{u_1}$ 及び $\widehat{U}\vec{u_2} = a_2 \vec{u_2}$ としよう．すると

$$\langle \vec{u_2}, \vec{u_1} \rangle = \langle \widehat{U}\vec{u_2}, \widehat{U}\vec{u_1} \rangle = \langle a_2\vec{u_2}, a_1\vec{u_1} \rangle = a_2^* a_1 \langle \vec{u_2}, \vec{u_1} \rangle = \frac{a_1}{a_2} \langle \vec{u_2}, \vec{u_1} \rangle. \tag{7.6}$$

である．$a_1 \neq a_2$ なので式 (7.6) は $\langle \vec{u_2}, \vec{u_1} \rangle = 0$ を与える． **証明終り**

解説

1. 重要な完全性の定理は，ユニタリー作用素 $\widehat{U}$ にもあてはまる．つまり，その固有ベクトル $|e^{i\theta_m}, j\rangle$(j は縮退のラベルである) はヒルベルト空間の基底系を作り上げる．そして任意のベクトルは，$d(m)$ を m 番目の固有値 $e^{i\theta_m}$ の縮退度であるとして (**cf.** 式 (3.52))，

$$|\psi\rangle = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{d(m)} \langle e^{i\theta_m}, j | \psi \rangle \, |e^{i\theta_m}, j\rangle \tag{7.7}$$

と展開できる．付随する恒等作用素の分割は (**cf.** 式 (3.53))，

$$\widehat{\mathbb{1}} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{d(m)} |e^{i\theta_m}, j\rangle\langle e^{i\theta_m}, j| \tag{7.8}$$

となり，$\widehat{U}$ のスペクトル表現は (**cf.** 式 (3.54)，式 (3.59))，

$$\widehat{U} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{d(m)} e^{i\theta_m} \, |e^{i\theta_m}, j\rangle\langle e^{i\theta_m}, j| = \sum_{m=1}^{M} e^{i\theta_m} \, \widehat{P}_m \tag{7.9}$$

である．ここで，

$$\widehat{P}_m := \sum_{j=1}^{d(m)} |e^{i\theta_m}, j\rangle\langle e^{i\theta_m}, j| \tag{7.10}$$

は，固有値 $e^{i\theta_m}$ に対する固有部分空間の上への射影作用素である．

2. 自己共役作用素のように，ユニタリー作用素は，離散的あるいは連続な固有値を持つことができる．6.2 節での議論と類似の方法によって，このタイプの作用素を取り扱うことができる．特に，次のような形式のスペクトル表現を与えるスペクトル定理の一般化がある (**cf.** 式 (6.15))：

$$\langle\vec{\psi},\widehat{U}\vec{\phi}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, d_\theta\langle\vec{\psi},\widehat{E}_\theta\vec{\phi}\rangle. \tag{7.11}$$

3. 量子論には非常に重要な，自己共役作用素とユニタリー作用素の間の深い関係がある．自己共役作用素またはユニタリー作用素の固有値は，それぞれ実数または絶対値 1 の複素数である．一方 r が実数なら $|e^{ir}| = 1$ である．これは以下の重要な定理を示唆する：

定理

$\widehat{A}$ が自己共役作用素であれば，$e^{i\widehat{A}}$ はユニタリー作用素である．

証明

簡単のために，作用素 $\widehat{A}$ の固有値スペクトルが離散的である場合だけを考察する．すると $\widehat{A}$ はスペクトル表現 $\widehat{A}{=}\sum_{m=1}^{M} a_m\widehat{P}_m$ を持ち，自己共役作用素の関数の定義式 (5.28) によって，

$$e^{i\widehat{A}} = \sum_{m=1}^{M} e^{ia_m}\widehat{P}_m \tag{7.12}$$

となる．一方，$\widehat{P}_m^\dagger = \widehat{P}_m$ を用いれば，これは共役 $\left(e^{i\widehat{A}}\right)^\dagger$ が表現

$$\left(e^{i\widehat{A}}\right)^\dagger = \sum_{m=1}^{M} e^{-ia_m}\widehat{P}_m \tag{7.13}$$

を持つことを意味する．すると

$$\begin{aligned} e^{i\widehat{A}}\left(e^{i\widehat{A}}\right)^\dagger &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} e^{i(a_m-a_k)}\widehat{P}_m\widehat{P}_k \\ &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} e^{i(a_m-a_k)}\delta_{mk}\widehat{P}_k = \sum_{m=1}^{M}\widehat{P}_m = \widehat{\mathbb{1}} \end{aligned}$$

である．ここで $\widehat{P}_m\widehat{P}_k = \delta_{mk}\widehat{P}_k$ を使った．同じように，$\left(e^{i\widehat{A}}\right)^{\dagger}e^{i\widehat{A}}=\widehat{\mathbb{1}}$ であることもわかる． **証明終り**

解説

1. あるひとつの自己共役作用素 $\widehat{A}$ から

$$\widehat{U}(r) := e^{ir\widehat{A}} = \sum_{m=1}^{M} e^{ira_m}\widehat{P}_m \tag{7.14}$$

によって定義されるユニタリー作用素 $\widehat{U}(r)$ の $r \in \mathbb{R}$ に対する 1 パラメーター族は，量子論で非常に重要な役割をはたす．ユニタリー作用素のこの族 $r \mapsto \widehat{U}(r)$ が．任意の $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して 3 つの条件

$$\widehat{U}(0) = \widehat{\mathbb{1}} \tag{7.15}$$

$$\widehat{U}(r_1)\widehat{U}(r_2) = \widehat{U}(r_1 + r_2) \tag{7.16}$$

$$\widehat{U}(-r) = \widehat{U}(r)^{-1} \tag{7.17}$$

を満たすことは，スペクトル定理から簡単に示せる．群論のことばでは，これらの式は，$r \mapsto \widehat{U}(r)$ が実数の加群のユニタリー表現であるという．特に，最初の時刻 t_1 を $t_1 = 0$ と選べば，式 (6.50) での時間発展はまさにこのカテゴリーに分類される．

2. 量子論に関する限り，本当に重要な定理 (数学者ストーンによる) は上の逆である:

定理

実数 r によってラベル付けされたユニタリー作用素全体を $\{\widehat{U}(r), r \in \mathbb{R}\}$ としよう．作用素のこの 1 パラメーター族が以下の 3 条件を満たすとする:

1. 行列要素 $\langle\phi|\,\widehat{U}(r)\,|\psi\rangle$ は，全てのベクトル $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ に対して r の連続関数である．
2. $\widehat{U}(0) = \widehat{\mathbb{1}}$
3. 任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\widehat{U}(r_1)\widehat{U}(r_2) = \widehat{U}(r_1 + r_2)$ である．

すると，

$$\widehat{U}(r) = e^{ir\widehat{A}} \tag{7.18}$$

及び，すべての $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ に対して，

$$i\widehat{A}\,|\psi\rangle = \lim_{r\to 0} \frac{\widehat{U}(r) - \widehat{\mathbb{1}}}{r}\,|\psi\rangle \tag{7.19}$$

を満たす自己共役作用素 $\widehat{A}$ が一意的に存在する．ここで，式 (7.19) の右辺は，2.5 節で簡単に議論したベクトルの強収束を意味する．

ストーンの定理はここで証明するには難しい (例えば，Reed & Simon (1972) を参照)．しかしその重要性はまもなく示される．実際それは，量子論において特定の自己共役作用素が生じる最も重要な機構の 1 つである．

7.2 量子論における応用

7.2.1 ユニタリー作用素の基本的役割

たいていのユニタリー作用素は，自己共役ではないので直接物理的な観測量を表現することはできないが，量子論において，状態と観測量をベクトルと自己共役作用素に結びつける不定性を定量化する役割を担う．これは見かけによらず非常に重要である．

$\widehat{U}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のユニタリーな作用素，$\widehat{A}$ を自己共役作用素であるとする．すると $\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1}$ $(=\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{\dagger})$ はまた，$(\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{\dagger})^{\dagger} = (\widehat{U}^{\dagger})^{\dagger}\widehat{A}^{\dagger}\widehat{U}^{\dagger} = \widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{\dagger}$ から，自己共役である．

さらに，a が固有ベクトル $\vec{u}$ に対する $\widehat{A}$ の固有値であるとすれば

$$\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1}(\widehat{U}\vec{u}) = \widehat{U}(\widehat{A}\vec{u}) = \widehat{U}(a\vec{u}) = a(\widehat{U}\vec{u}) \tag{7.20}$$

であり，これは任意のユニタリー作用素 $\widehat{U}$ に対して，$\widehat{A}$ のどんな固有値もまた $\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1}$ の固有値であることを意味する．逆に，自己共役作用素 $(\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1})$ を $\widehat{A}$ と読み替え，ユニタリー作用素 $\widehat{U}^{-1}$ を $\widehat{U}$ と読み替えて同

じ論法を用いれば，$\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1}$ のどんな固有値も必然的に $\widehat{U}^{-1}(\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1})\widehat{U} \equiv \widehat{A}$ の固有値であるということがわかる．このように，$\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1}$ は作用素 $\widehat{A}$ と正確に同じ固有値を持つ．

$\widehat{U}$ がユニタリーなので，任意の $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\left|\langle \widehat{U}\vec{\psi}, \widehat{U}\vec{\phi}\rangle\right| = \left|\langle \vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle\right| \tag{7.21}$$

であり，

$$\langle \widehat{U}\vec{\psi}, (\widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1})\,\widehat{U}\vec{\phi}\rangle = \langle \widehat{U}\vec{\psi}, \widehat{U}\widehat{A}\vec{\phi}\rangle = \langle \vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\phi}\rangle \tag{7.22}$$

となる．従って，5.1 節の規則 3 と式 (5.29) を用いて，

$$\begin{array}{rcl} \text{物理状態} & \longmapsto & \text{状態ベクトル } \vec{\psi} \in \mathcal{H} \\ \text{物理的観測量 } A & \longmapsto & \mathcal{H} \text{ に作用する自己共役作用素 } \widehat{A} \end{array}$$

で対応をつければ，同じ物理的予測が，任意のユニタリー作用素 $\widehat{U}$ に対して，対応

$$\text{物理状態} \quad \longmapsto \quad \text{状態ベクトル } \widehat{U}\vec{\psi} \in \mathcal{H} \tag{7.23}$$

$$\text{物理的観測量 } A \quad \longmapsto \quad \mathcal{H} \text{ に作用する自己共役作用素 } \widehat{U}\widehat{A}\widehat{U}^{-1} \tag{7.24}$$

に対しても得られる．このように，物理量とそれらの数理表現の対応が，上のタイプの変換の任意性を残して，定義されるという重要な結論に達する．

より一般には，任意のベクトル $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$\left|\langle \vec{\psi}', \vec{\phi}'\rangle\right| = \left|\langle \vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle\right| \tag{7.25}$$

であるような任意の写像 $\vec{\psi} \mapsto \vec{\psi}'$ を考察することもできた．そのような写像は，式 (5.29) のような確率的予測を不変にするので，量子物理学においては明らかに興味がある．しかし，式 (7.25) を満たす $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への写像がなぜ線形でなければならないかという明白な理由は（ユニタリー作用素の作用に由来して導かれたことを別にしても）無いようである．これに関して，いっそう注目に値する以下の定理が存在する．

定理 (ウィグナー)
$\vec{\psi} \mapsto \vec{\psi}'$ を，以下の条件を満たすヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ からそれ自身への任意の写像とする：(i) 可逆である．そして，(ii) 任意の $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して $\left|\langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle\right| = \left|\langle\vec{\psi}', \vec{\phi}'\rangle\right|$ を満たす．すると，ユニタリー又は反ユニタリーである作用素 $\widehat{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ で，任意のベクトル $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して $\vec{\psi}' = \widehat{U}\vec{\psi}$ となるものが (任意の位相因子まで一意的に決定して) 存在する．

解説

1. 反ユニタリー作用素 $\widehat{A}$ とは，$\mathcal{H}$ からそれ自身への写像で，以下を満たすものとして定義される：

i) 任意の複素数 α, β，任意のベクトル $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$\widehat{A}(\alpha\vec{\psi} + \beta\vec{\phi}) = \alpha^* \widehat{A}\vec{\psi} + \beta^* \widehat{A}\vec{\phi} \tag{7.26}$$

の意味で反線形である (**cf.** 式 (2.27))．そして，

ii) 任意のベクトル $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して (**cf.** 式 (7.1))

$$\langle\widehat{A}\vec{\psi},\ \widehat{A}\vec{\phi}\rangle = \langle\vec{\phi}, \vec{\psi}\rangle \quad (= \langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle^*) \tag{7.27}$$

が成り立つ．

2. 反ユニタリー作用素 $\widehat{A}$ の 2 乗は，$\langle\widehat{A}^2\vec{\psi}, \widehat{A}^2\vec{\phi}\rangle = \langle\widehat{A}\vec{\phi}, \widehat{A}\vec{\psi}\rangle = \langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle$ からユニタリーである．同様に，$\widehat{U}$ がユニタリーであれば，$\widehat{U}^2$ もそうである．

3. 反ユニタリー作用素の良く知られた例は，$(\widehat{T}\psi)(x) := \psi(x)^*$ によって定義される，波動力学での時間反転作用素 $\widehat{T}$ である．

7.2.2　観測器の変位と正準交換関係

同じ物理的状態と観測量に対して，異なる (しかし，式 (7.24) の意味では同等な) 数学的表現が可能な状況が量子論ではたびたび起こる．以下我々は，変位する観測器という視点で，これらの概念の応用を示していこう．記述を容易にするために，推論を 11 のステップに分解しよう．

1. 2 つの観測器 O_1 と O_2 によって測定される孤立した量子系を考察する．O_1 は座標の原点に設置して (図 7.1 参照)，O_2 は x-軸に沿って距離 a だけ変位させた位置に設置する．両観測器とも，物理的状態をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトルと結びつける，同じ量子力学の規則を適用するとしよう．系は異なる位置から観測されるのだから，系に与えられた物理的な状態は一般に異なる状態ベクトル (しかし，同じヒルベルト空間で) として記述されるだろう．

しかし，最初の観測器 a を変位させて O_2 に一致させても，逆に O_2 を O_1 の方へ $-a$ だけ変位させても，物理空間の**均一な**性質によって，同じ状況のはずである．従って，系の同じ観測量の測定は，2 つの観測器で同じものでなければならないはずである．特に，O_1 と O_2 によって系に特定されるベクトルをそれぞれ $|\psi\rangle$ と $|\psi\rangle_a$ と書くと，確率的予測が両者で一致するためには

$$\left|\langle\psi|\phi\rangle\right|^2 = \left|{}_a\langle\psi|\phi\rangle_a\right|^2 \tag{7.28}$$

でなければならない．

2. ウィグナーの定理から，ユニタリーあるいは反ユニタリーな作用素 $\widehat{D}(a)$ が存在し，

$$|\psi\rangle_a = \widehat{D}(a)\,|\psi\rangle. \tag{7.29}$$

を満たす事がわかる．

3. さて，さらに第 3 の観測器 O_3 を，O_2(図 7.1 参照) からの距離 b に設置しよう．物理的には，O_3 によって特定される状態 $|\psi\rangle_{b+a} = D(b+a)\,|\psi\rangle$

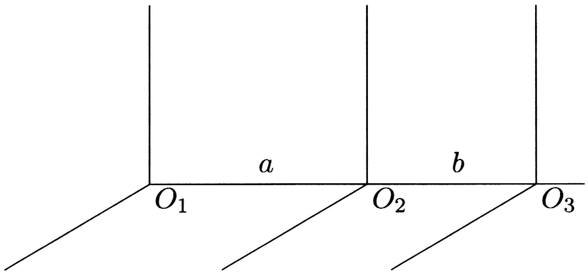


図 7.1: 観測器群の配置

は，次のどちらの場合も同じでなければならない[1]．つまり，O_1 の状態 $|\psi\rangle$ から出発して，O_3 が直接 $x = b + a$ に移動するか，あるいは最初にまず $x = a$ に移動して O_2 が特定する状態 $|\psi\rangle_a$ になって，その後そこから $x = b + a$ まで移動するか，である．このように，任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{b+a} &= \widehat{D}(b+a)\,|\psi\rangle \\ &= \widehat{D}(b)\,|\psi\rangle_a = \widehat{D}(b)\widehat{D}(a)\,|\psi\rangle \end{aligned} \tag{7.30}$$

とならなければならないことがわかる．これは任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{D}(b)\widehat{D}(a) = \widehat{D}(b+a) \tag{7.31}$$

であることを示す．

4. 特別な値 $a = b = r/2$ を挿入すると，$\widehat{D}(r) = \widehat{D}(r/2)\widehat{D}(r/2)$ となる．しかしウィグナーの定理への解説 2 によって，積 $\widehat{D}(r/2)\widehat{D}(r/2)$ は，$\widehat{D}(r/2)$ がユニタリーか反ユニタリーであるかに関わり無く，ユニタリーである．このように，任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して $\widehat{D}(r)$ はユニタリー作用素である．ここで，物理空間に対して，任意の r が $r = r/2 + r/2$ と書ける，という特定の仮定をした．

[1] 実際に，これは位相因子を除いて正しい．しかし，この位相因子は $\widehat{D}$ の定義に繰り込める．

5. 明らかに $\widehat{D}(0) = \widehat{\mathbb{1}}$.

6. 物理的には，a の観測器が連続的に x-軸に沿って変位するので，$\langle\phi|\psi\rangle_a = \langle\phi|\,\widehat{D}(a)\,|\psi\rangle$ も連続的に変わることを期待する．再びこれは，物理空間が**連続体**であるという我々の見解の反映である．

7. 以上でストーンの定理が成立するための 3 条件が満たされることがわかった．従って，自己共役作用素が一意的に存在することになる．これは $\widehat{d_x}$ と書かれ，(x 方向に沿っての移動の生成元と呼ばれる)

$$\widehat{D}(a) = e^{ia\widehat{d_x}} \tag{7.32}$$

を満たす．そして任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して

$$i\widehat{d_x}\,|\psi\rangle = \lim_{a\to 0} \frac{\widehat{D}(a) - \widehat{\mathbb{1}}}{a}\,|\psi\rangle \tag{7.33}$$

を満たす[2]．

8. 状態 $|\psi\rangle$ を $\widehat{D}(a)\,|\psi\rangle$ へ移動する変換に付随して，観測量と自己共役作用素の対応は

$$\widehat{B} \mapsto \widehat{B}_a = \widehat{D}(a)\widehat{B}\widehat{D}(a)^{-1} \tag{7.34}$$

と変換する．ここで $\widehat{B}$ と $\widehat{B}_a$ はそれぞれ，O_1 と O_2 によって特定される作用素である．さて，a が小さいとすれば，我々は式 (7.32) の指数関数を展開することができるので[3] $\widehat{D}(a) = 1 + ia\widehat{d_x} + O(a^2)$ と書こう．すると式 (7.34) は

$$\begin{aligned}\widehat{B}_a &= (1 + ia\widehat{d_x})\widehat{B}(1 - ia\widehat{d_x}) + O(a^2)\\ &= \widehat{B} + ia[\,\widehat{d_x}, \widehat{B}\,] + O(a^2)\end{aligned} \tag{7.35}$$

---

[2] 厳密にはこの等式は，非有界作用素 $\widehat{d_x}$ が実際に定義される，あるベクトルの部分集合に対してのみ成立する．

[3] $\mathcal{H}$ が有限次元であれば，$e^{ia\widehat{d_x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(ia\widehat{d_x})^n/n!$ の意味で，結果は厳密である．ここで，部分和は適正な意味で収束する．無限次元の場合は，よりいっそうの配慮が必要であるが，基本の考えは多かれ少なかれ正しい．それはストーンの定理を用いれば厳密になる．

となる．右辺の 2 つの作用素の**交換子**が現れることに注意しよう．実際，量子論で最も重要な交換子は，式 (7.35) のような展開にその起源を持つ．

9. 座標系の原点にいる O_1 によって測定される，系の質量中心の x 成分を特に考察しよう．すると式 (7.35) によって，変位した観測器 O_2 によって特定される，この観測量に対する作用素は

$$\widehat{x}_a = \widehat{x} + ia[\,\widehat{d}_x, \widehat{x}\,] + O(a^2) \tag{7.36}$$

である．一方，物理的に**同じ**観測量は，O_2 によって作用素 $\widehat{x} + a$ と表現される．と言うのは，O_2 は O_2 の座標原点 (点 $x = a$) から，位置を表示するために $\widehat{x}$ を使うからである．このようにして，$\widehat{x}_a = \widehat{x} + a$ なので，式 (7.36) の極限 $a \to 0$ をとって

$$-i = [\,\widehat{d}_x, \widehat{x}\,] \tag{7.37}$$

となる．

10. 最終的なステップは作用素 $\widehat{d}_x$ を $\widehat{p}_x/\hbar$ と同一視することである．ここで，$\widehat{p}_x$ は x 方向に沿った運動量である．これは，理論の古典的極限を考えることによって，あるいは波動力学の結果との整合性を要求することによって，正当化される．このように，O_2 と O_1 によって特定される状態には

$$|\psi\rangle_a = e^{ia\widehat{p}_x/\hbar}\,|\psi\rangle \tag{7.38}$$

という関係があるという結果を得る．

解説

1. 上の論法は，全ての空間 3 軸に沿った変位に一般化される．付随する自己共役生成元を $\widehat{d}_k (k = 1, 2, 3)$ と表示すると，式 (7.37) は

$$[\,\widehat{x}_j, \widehat{d}_k\,] = i\delta_{jk} \tag{7.39}$$

になる．ここで，$\widehat{x}_j$，$j = 1, 2, 3$ は座標の原点に位置する観測器の，3 座標軸に付随する位置作用素である．運動量の測定に対する同様の解析は

$$[\widehat{p}_j, \widehat{p}_k] = 0 \tag{7.40}$$

を与え，お互いに異なる一定速度で動く座標系に対する同様の解析は，

$$[\widehat{x}_j, \widehat{x}_k] = 0 \tag{7.41}$$

を与える．このように，物理空間の構造が均一なことだけから，非相対論的な波動力学でおなじみの正準交換関係を，一般的な量子力学の理論形式から**導ける**のである．

2. 以上全ての解析は，座標系がお互いに回転する場合の観測器にも適用できる．物理的な**空間の等方性** (つまり 特別な向きが無いこと) を仮定すると，交換関係

$$[\,\widehat{R}_x, \widehat{R}_y\,] = i\widehat{R}_z \tag{7.42}$$

(とこれを順に置換したもの) を満たす一組の「回転生成元」$\widehat{R}_x, \widehat{R}_y, \widehat{R}_z$ の存在が導びかれる．さらに，$\widehat{R}_x$ を $\widehat{J}_x/\hbar$ と同一視すると，角運動量作用素が満たすよく知られてた代数を再現する．

3. $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ を交換関係

$$[\,\widehat{A}, \widehat{B}\,] = i\hbar \tag{7.43}$$

を満たす任意の自己共役作用素，$|a\rangle$ を固有値 a に対する $\widehat{A}$ の固有ベクトルであるとする．$|a\rangle$ に関して，式 (7.43) の左辺の対角行列要素をとれば

$$\langle a|\,[\,\widehat{A}, \widehat{B}\,]\,|a\rangle = \langle a|\,\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}\,|a\rangle = (a-a)\langle a|\,\widehat{B}\,|a\rangle = 0 \tag{7.44}$$

となる．一方，式 (7.43) 右辺の行列要素は $i\hbar$ である．従って，$i\hbar$ で両辺を割ると，有名な結果 $0 = 1$ を証明してしまうことになる！

この不合理は，交換関係式 (7.43) を満たす作用素が存在しないことを意味するのだろうか？これは式 (7.37) に至る少なくとも 1 つのステップが間違っていることを意味する．例えばステップ 6 で使われた空間が連続であるという仮定は，正しくないかもしれない．しかし，我々は式 (7.43) を満たす作用素，すなわち初等波動力学における $\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ の**存在**を知っている．このあきらかなパラドックスを解消するヒントは，上の議論において両方の作用素の固有値スペクトルが**連続**でなければならなかったということにある．この場合には一般化された固有ベクトルは規格化不可能で，

従って式 (7.44) のスカラー積には意味がない．この例でわかるとおり，一般にスペクトルが連続する作用素は慎重に取り扱うべきである．

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が無限次元の場合だけ，連続スペクトルを持つ作用素が生じる可能性がある点に注意しよう．このように，系の空間位置を扱う**どんな**量子論も (それは必ず正準交換関係式 (7.37) に至る) 無限次元のヒルベルト空間を必然的に使わなければならない事がわかる．

一方，角運動量の交換関係 $[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i\hbar\widehat{J}_z$ にはこのような問題は無い．というのは，$|k\rangle$ を $\widehat{J}_x$ の固有ベクトルであるとすれば，行列要素の式は $0 = \langle k|\,\widehat{J}_z\,|k\rangle$ となるからである．

7.3 不確定性関係

7.3.1 初等統計論

量子力学の理論形式から正準交換関係を引き出したところで，それの意味するものについて考えてみよう．これに関しては長年にわたって多くのお互いに矛盾する議論があったので，ここでは不確定性関係が実際に意味するものについて，正確に議論しよう．

$\triangle x$ のような表示は，しばしば混乱するいろいろな意味を持つ可能性がある[4]．最も安全な方法は，最初に理論の解釈の体系を決めて，それから「不確定性」に最適な定義を与えればよい．特に，量子論への実用論の方法では，A の繰り返し測定がなされるとき，観測量 A の不確定性 $\triangle A$ とは，正確に観測結果のばらつきの測度である．我々は，これらの量の不確定性関係がまさに理論形式に**由来する**ということを学ぶだろう．それは，理論の外から持ち込まれる余分な要請ではないのである．

初等的な統計の理論における定義から始めよう．観測量 A の測定において，確率 $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_M$ で結果 $a_1, a_2, \ldots, a_M$ が生じると予測されるとき，A の**予想される結果**は

[4] この点の優れた解析は Scheibe (1973) 参照．

$$\langle A \rangle := \sum_{i=1}^{M} a_i \, \mathrm{p}_i \tag{7.45}$$

と定義されて，A の**分散**は

$$\sigma^2 := \sum_{i=1}^{M} \bigl(a_i - \langle A \rangle\bigr)^2 \, \mathrm{p}_i \tag{7.46}$$

となる．書き直すと

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{M} \bigl(a_i^2 + \langle A \rangle^2 - 2a_i \langle A \rangle\bigr) \, \mathrm{p}_i = \sum_{i=1}^{M} a_i^2 \, \mathrm{p}_i - \langle A \rangle^2 \tag{7.47}$$

である．このように，

$$\sigma^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \tag{7.48}$$

は，A の期待値 $\langle A \rangle$ のまわりに結果がばらつく，広がりの測度である．σ は A の**標準偏差**と呼ばれる．

量子論における確率の相対度数解釈に基づけば，観測量 A を測定するとき，**不確定性** (あるいは**ばらつき**)$\triangle_\psi A$ を次のように定義するのが妥当だろう：

$$(\triangle_\psi A)^2 := \langle (A - \langle A \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi = \langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2 \tag{7.49}$$

ここで $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \widehat{A} | \psi \rangle$ つまり

$$\triangle_\psi A = \bigl(\langle \psi | \widehat{A}^{\,2} | \psi \rangle - \langle \psi | \widehat{A} | \psi \rangle^2\bigr)^{\frac{1}{2}} \tag{7.50}$$

である．ここで 2 乗根は常に正に取ると約束しよう．

解説

1. 不確定性 $\triangle_\psi A$ は，系の状態 $|\psi\rangle$ に依存する．このことは不確定性関係の論議の際，見過ごされがちである．

2. もし $|\psi\rangle$ が $\widehat{A}$ の固有ベクトルなら $\triangle_\psi A = 0$ である．これは我々の以前の結果と整合する．つまり系の状態が固有ベクトルであれば，確率 1

で，A の測定の結果は付随した固有値となる．すなわち予想される結果の広がりは零であると予測されるのである．

逆に，シュヴァルツの不等式を使うと，$\triangle_\psi A = 0$ なら $|\psi\rangle$ が $\widehat{A}$ の固有状態であることがわかる [演習]．このように，不確定性 $\triangle_\psi A$ は，A の値が個々の系によって**所有されない度合い**の良い測度である．この考えを，さらに以下で発展させよう．

7.3.2 シュヴァルツの不等式

不確定性関係そのものは，ヒルベルト空間の理論で有名な以下の定理から導かれる．印刷の簡潔さのために，これは Dirac 記号を使わず書こう．

定理 (シュヴァルツの不等式)

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の任意のベクトルの対 $\vec{\psi}, \vec{\phi}$ は不等式

$$\left|\langle\vec{\psi},\vec{\phi}\rangle\right| \ \leq \ \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle^{\frac{1}{2}}\,\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{7.51}$$

をみたす．2 つのベクトルが線形従属なときのみ等式になる．

証明

$\vec{\psi} = 0$ または $\vec{\phi} = 0$ なら，定理は自明である．両方のベクトルとも零以外のとき，任意の複素数 α に対して，スカラー積の定義を与える基本条件式 (2.51) から，

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \langle\vec{\psi}+\alpha\vec{\phi},\vec{\psi}+\alpha\vec{\phi}\rangle \\ &= \ \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle + \alpha^*\alpha\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle + \alpha^*\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle + \alpha\langle\vec{\psi},\vec{\phi}\rangle \end{aligned} \tag{7.52}$$

となる．特に，

$$\alpha = -\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle/\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle$$

ととれば，式 (7.52) に代入して

$$0 \ \leq \ \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle + \frac{\left|\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle\right|^2}{\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle} - \frac{\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle^*\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle}{\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle} - \frac{\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle\langle\vec{\psi},\vec{\phi}\rangle}{\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle}$$

を得る．この不等式の右辺は，

$$\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle + \frac{\left|\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle\right|^2}{\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle} - 2\frac{\left|\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle\right|^2}{\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle}$$

となり，

$$0 \;\leq\; \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle - \frac{\left|\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle\right|^2}{\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle}.$$

従って，

$$\left|\langle\vec{\phi},\vec{\psi}\rangle\right|^2 \;\leq\; \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle$$

となる．これで定理の最初の部分が証明された．

$\vec{\psi}$ と $\vec{\phi}$ が線形従属なら，ある $\beta \in \mathbf{C}$ に対して $\vec{\psi}= \beta\vec{\phi}$ であり，これを式 (7.51) に代入すれば，等式が成立することが直ちにわかる．逆に，上の計算の最終表示で等式が成立するなら，計算を遡ったあらゆる段階でも等式でなければならない．特にそれは式 (7.52) でも成立しなければならない．だから，スカラー積の基本条件から $\vec{\psi} + \alpha\vec{\phi} = 0$ が成立しなければならない．これは $\vec{\psi}$ と $\vec{\phi}$ が線形従属であることを意味する．　**証明終り**

解説

1. 普通のベクトル計算で，シュヴァルツの不等式は，単に $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{\frac{1}{2}}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$ である．さらに $\cos\theta$ を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角とすれば，単に $|\cos\theta| \leq 1$ ということである．

2. シュヴァルツの不等式を使って次のことがわかる [演習]．　$\|\vec{\psi}\| := \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle^{\frac{1}{2}}$ によって定義されるノルムは，任意のベクトル $\vec{\psi},\vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して**三角不等式**

$$\|\vec{\psi} + \vec{\phi}\| \;\leq\; \|\vec{\psi}\| + \|\vec{\phi}\| \tag{7.53}$$

を満たす．この不等式は，ベクトル列の収束を議論する際によく使用される（2.5.4 節の短い論議を参照）．

7.3.3　一般化された不確定性関係

さてもっと一般に，交換しない任意の作用素のペアに対して不確定性関係を引き出すのに，シュヴァルツの不等式を使おう．

定理

O_1 と O_2 が任意の観測量なら

$$\boxed{\triangle_\psi O_1 \, \triangle_\psi O_2 \geq \frac{1}{2}\left|\langle\vec{\psi}, [\,\widehat{O}_1, \widehat{O}_2\,]\vec{\psi}\rangle\right|} \tag{7.54}$$

である．

証明

$\widehat{A} := \widehat{O}_1 - \langle O_1\rangle_\psi \,\widehat{\mathbb{1}}$ 及び $\widehat{B} := \widehat{O}_2 - \langle O_2\rangle_\psi \,\widehat{\mathbb{1}}$ とすると，

$$\left(\triangle_\psi O_1\right)^2 = \langle(O_1 - \langle O_1\rangle_\psi)^2\rangle_\psi = \langle A^2\rangle_\psi = \langle\vec{\psi}, \widehat{A}^{\,2}\vec{\psi}\rangle = \langle\widehat{A}\vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\psi}\rangle$$

である．最後の等式は $\widehat{A}$ のエルミート性による．従って，

$$\triangle_\psi O_1 = \|\,\widehat{A}\vec{\psi}\,\|\,.$$

そして，同じように $\triangle_\psi O_2 = \|\,\widehat{B}\vec{\psi}\,\|$．さらに，単位作用素はすべてと交換するので，$[\,\widehat{O}_1, \widehat{O}_2\,] = [\,\widehat{A}, \widehat{B}\,]$ である．すると，証明すべきことは

$$\|\,\widehat{A}\vec{\psi}\,\|\,\|\,\widehat{B}\vec{\psi}\,\| \geq \frac{1}{2}\left|\langle\vec{\psi}, [\,\widehat{A}, \widehat{B}\,]\vec{\psi}\rangle\right|$$

である．さて，シュヴァルツの不等式から

$$\|\,\widehat{A}\vec{\psi}\,\|\,\|\,\widehat{B}\vec{\psi}\,\| \geq \left|\langle\widehat{A}\vec{\psi}, \widehat{B}\vec{\psi}\rangle\right| = \left|\langle\vec{\psi}, \widehat{A}\widehat{B}\vec{\psi}\rangle\right|$$

である．ここで $\widehat{A}$ が自己共役であるので最後の等式がでる．しかし恒等的に

$$\widehat{A}\widehat{B} = \frac{1}{2}[\,\widehat{A}, \widehat{B}\,]_+ + \frac{1}{2}[\,\widehat{A}, \widehat{B}\,]$$

である．ここで $[\widehat{A},\widehat{B}]_+ := \widehat{A}\widehat{B}+\widehat{B}\widehat{A}$ は2つの作用素の**反交換子**である．従って

$$\triangle_\psi O_1 \,\triangle_\psi O_2 \;\geq\; \left|\langle\vec{\psi}, \left(\frac{1}{2}[\,\widehat{A},\widehat{B}\,]_+ + \frac{1}{2}[\,\widehat{A},\widehat{B}\,]\right)\vec{\psi}\rangle\right|$$

となる．しかし，$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ が自己共役なので，数 $\langle\vec{\psi},[\,\widehat{A},\widehat{B}\,]_+\vec{\psi}\rangle$ は実数，そして $\langle\vec{\psi},[\,\widehat{A},\widehat{B}\,]\vec{\psi}\rangle$ は虚数 [演習] である．任意の実数 a と b に対して，$|a+ib|^2=|a|^2+|b|^2$ だから

$$\triangle_\psi O_1 \,\triangle_\psi O_2 \;\geq\; \frac{1}{2}\left\{\left|\langle\vec{\psi},[\,\widehat{A},\widehat{B}\,]_+\vec{\psi}\rangle\right|^2 + \left|\langle\vec{\psi},[\,\widehat{O}_1,\widehat{O}_2\,]\vec{\psi}\rangle\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.55}$$

$$\geq\; \frac{1}{2}\left|\langle\vec{\psi},[\,\widehat{O}_1,\widehat{O}_2\,]\vec{\psi}\rangle\right| \tag{7.56}$$

であり，定理が証明された． **証明終り**

解説

1. 不等式 (7.56) は最終的な式 (7.56) よりわずかに強いが，後者が最も一般に引用される形式である．

2. 状態が密度行列 $\widehat{\rho}$ である場合を含む，さらに一般化された不確定性関係がある．

3. 波動力学での例:$[\,\widehat{x},\widehat{p}\,]=i\hbar$ に対しては，式 (7.56) は，任意の状態 $\vec{\psi}$ に対して，よく知られた不確定性関係

$$\triangle_\psi x \,\triangle_\psi p \;\geq\; \frac{\hbar}{2} \tag{7.57}$$

を与える[5]．

4. 単位作用素の倍数でない交換関係を持つ作用素ペアに，一般化された不確定性関係を適用するとき，$\triangle_\psi A$ が状態に依存することの重要性はより鮮明になる．良い例は，式 (7.56) が

$$\triangle_\psi J_x \,\triangle_\psi J_y \;\geq\; \frac{\hbar}{2}\langle J_z\rangle_\psi \tag{7.58}$$

---

[5] 厳密に言うとこれはまだ正しくない．$\widehat{x}$ と $\widehat{p}$ は，非有界作用素であって，全ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ の上で定義されない．定理の証明はこの場合難しくなる．

を与える，角運動量の関係 $[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i\hbar \widehat{J}_z$ である．$\langle J_z \rangle_\psi = 0$ である状態 $\vec{\psi}$ に対しては，積 $\triangle_\psi J_x \triangle_\psi J_y$ の大きさに下限がない．

7.3.4　簡単な例

以前考察した簡単なモデルを用いて一般化された不確定性関係をみてみよう．

問題

6.4.2 節で議論したハミルトニアン $\widehat{H} = \widehat{\mathbb{1}} + \alpha\sigma_y$ を持つ力学系を考察する．

(i) $|\psi_0\rangle = \binom{1}{0}$ のとき，状態 $|\psi_t\rangle$ で予想される S_x の期待値は何か？

(ii) この状態での不確定性 $\triangle S_x$ は何か？

(iii) 交換子 $[\widehat{S}_x, \widehat{S}_y]$ を計算し，一般化された不確定性関係が任意の時刻 t に，観測量 S_x と S_y に対してどのように満たされるかを説明すること．

解答

(i) $|\psi_t\rangle$ が正規化されているので，S_x の期待値は $\langle S_x \rangle = \langle \psi_t | \widehat{S}_x | \psi_t \rangle$ である．ここで，

$$|\psi_t\rangle = e^{-it/\hbar} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha t}{\hbar} \\ \sin \frac{\alpha t}{\hbar} \end{pmatrix}$$

である．位相因子が打ち消しあって，

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha t}{\hbar} \\ \sin \frac{\alpha t}{\hbar} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha t}{\hbar} \\ \sin \frac{\alpha t}{\hbar} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha t}{\hbar} \\ \sin \frac{\alpha t}{\hbar} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \frac{\alpha t}{\hbar} \\ \cos \frac{\alpha t}{\hbar} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} 2 \cos \frac{\alpha t}{\hbar} \sin \frac{\alpha t}{\hbar} = \frac{\hbar}{2} \sin \frac{2\alpha t}{\hbar} \end{aligned} \tag{7.59}$$

となる．

(ii) 不確定性は，$(\triangle S_x)^2 = \langle S_x^2\rangle - \langle S_x\rangle^2$ である．$\widehat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ なので $\langle S_x^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$．式 (7.59) とあわせて

$$\triangle S_x = \frac{\hbar}{2}\left(1-\sin^2\frac{2\alpha t}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{2}\left|\cos\frac{2\alpha t}{\hbar}\right| \tag{7.60}$$

を得る．

(iii) 交換子は，

$$\begin{aligned}
[\,\widehat{S}_x, \widehat{S}_y\,] &= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\} \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left\{\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\right\} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

なので，$[\,\widehat{S}_x, \widehat{S}_y\,] = i\hbar\widehat{S}_z$ となる．

一般化された不確定性関係は

$$\triangle S_x\,\triangle S_y \geq \frac{1}{2}|\langle\psi_t|\,[\,\widehat{S}_x, \widehat{S}_y\,]\,|\psi_t\rangle| = \frac{\hbar}{2}|\langle\psi_t|\,\widehat{S}_z\,|\psi_t\rangle| \tag{7.61}$$

である．さて両辺を計算しよう．既に $\triangle S_x$ は計算したので $\triangle S_y$ を計算しよう．さて，

$$\begin{aligned}
\langle S_y\rangle &= \frac{\hbar}{2}\left\langle\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}\right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2}\left\langle\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\sin\frac{\alpha t}{\hbar}\\ i\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}\right\rangle = 0
\end{aligned}$$

なので $(\triangle S_y)^2 = \langle S_y^2\rangle$．しかし，$\widehat{S}_y^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ から $\langle S_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$ なので，$\triangle S_y = \frac{\hbar}{2}$．式 (7.60) を用いると，式 (7.61) の左辺は

$$\triangle S_x\,\triangle S_y = \frac{\hbar^2}{4}\left|\cos\frac{2\alpha t}{\hbar}\right|.$$

一方，式 (7.61) の右側は

$$\begin{aligned}
&\frac{\hbar}{2}\left|\left\langle\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}\right\rangle\right| \\
&\quad = \frac{\hbar^2}{4}\left|\left\langle\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ \sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha t}{\hbar}\\ -\sin\frac{\alpha t}{\hbar}\end{pmatrix}\right\rangle\right| = \frac{\hbar^2}{4}\left|\left(\cos^2\frac{\alpha t}{\hbar} - \sin^2\frac{\alpha t}{\hbar}\right)\right| \\
&\quad = \frac{\hbar^2}{4}\left|\cos\frac{2\alpha t}{\hbar}\right|
\end{aligned}$$

となり，不確定性関係はいつも満たされる．

7.3.5　概念的問題

量子論の相対度数解釈では，式 (7.57) のような不確定性関係と，同時測定の実行可能性とは関係がない！ 前者は，多数の同等に用意された系の上で，x と p を繰り返し測定した結果の統計的広がりを言うのであって，x と p 両方が同時に測定できると要求するわけではない．不等式 (7.56) は，この不等式を壊す統計的分散を持つように量子状態 $\vec{\psi}$ を準備できない，という原理的な制限を言っていると考えても良い．

このように，量子論への相対度数解釈によると，$\triangle_\psi A$ は，繰り返された多数回の測定結果の分散の極限を表示する．これは比較的問題を引き起こさない．しかし 5 章で，確率の相対度数解釈でなく，個々の系へ性質を割り当てる実在論的な試みに言及した．$\triangle_\psi A$ にどのような意味を与えるかということは，量子論のいろいろな解釈それぞれの全体的な構造をよく表現している．

いろいろな視点から議論する可能性があるが，1 つの視点は，1 回だけ起こる事象に対する確率的命題の意味，である．特に，「不確定性」$\triangle_\psi A$ は，この視点からの意味づけが必要である．その方法は物理学者によって千差万別である．ハイゼンベルクは彼の早期の仕事で，$\triangle_\psi A$ は量 A の**所有する量**の認識的な不確定性の測度だとみなした．そのような見解は，今日でもまだ時々あって，測定に対して「制御できない外乱」をその値に生じている，と曖昧に記述される．

しかし，そのような記述は非常に紛らわしい．標準的な量子論の中立的立場では，量 A は，我々がたまたま知らないが，ある値を持つ，と言うのでなく，典型的な量子状態において，A がある値をもつということはそもそも意味がない，とされる．そして存在しないものは，制御可能であろうが不可能であろうが，乱される可能性は無い．$\triangle_\psi A$ がやはり知識不足の測度だと主張するなら，**知識**という言葉がむしろ不当に使われているのであって，それはどこかで混乱に至るだろう．

ニールス・ボーアは，ハイゼンベルクの見解を嫌い，$\triangle_\psi A$ は，観測量 A を記述する際に，古典的な**概念**が量子レベルでどれだけ飛躍し異なっているかという指標だとする考えを発展させた．

いま一つの方法は，5 章で簡単に述べた考えに基づくものである．つまり量子論の確率的予測は，個々の系に対する観測量の値が特定の値を持つ潜在性 (あるいは傾向) を記述するというものである．すると，$\triangle_\psi A$ のような量は，性質 A が系にどれだけ現れなかったかを示す数値的な指標である．

このタイプの理論構成は非常に面白く，量子世界を記述するのに基本的に新しい概念が必要になることを強く示唆する．しかし，潜在性とか古典的概念の不適応性とかいう指標を用いて，**定量的な**意味を $\triangle_\psi A$ に与えることは簡単ではない．実際問題としてこの考え方を進めると，結局相対度数解釈に戻る傾向がある．これ以上議論を発展させるためには，量子論における一般の概念的諸問題を解析することが必要である．それをこれから述べようと思う．

第8章　量子論における概念的諸問題

8.1　問題の四つ組

6.4節の議論では，量子論における時間発展を古典物理学のときと同じように構成した．つまり，最初のある時刻の状態が指定されれば，状態空間の系の軌道は運動方程式によって唯一に決定される．しかし量子論では，測定がなされるときもうひとつの—全く異なる—状態の変化が起こる．これはいわゆる**状態ベクトルの収縮**である．そしてそれは，量子論の解釈における4つの主要な問題のうちの1つでもある．現実論的にあるいは厳密な道具論的に量子論にアプローチする場合は，これらの問題をなんとか回避する可能性もある．しかしより実在論に立って，個々の系の状態や性質について記述するときには，本質的な困難に出くわす．基本問題の四つ組は，以下の通りである：

1. 確率の意味
2. 測定の役割
3. 状態ベクトルの収縮
4. 量子もつれ

最初のものは古い問題である：その本性において確率的である理論の予測の意味は何か？第2は，量子論の基本的役割に関わる「測定」の概念の役割である：「測定」の概念は本当に必要だろうか？あるいは，測定とは，単に測定より前に系がどうであったか実際に知るだけのものである，という実在論の見解に至る可能性もあるのだろうか？状態ベクトルの収縮は，特定のタイプの測定と関連する，状態ベクトルの変化であり，これには多く

の問題がある：この変化は基本的な現象だろうか?あるいはシュレーディンガー方程式によって時間発展する，量子系及び測定装置の全体系に対する現実的な近似と見る可能性もあるのだろうか？4つ目の問題—量子もつれ—は，最も挑戦的なもので，量子系全体がその部分の和ではない，という示唆を含んでいる．それは確かに，少なくとも古典物理学でいう意味の部分の和ではない．

これらの4つの問題は，お互いに強く関連している．それらの明確な表現あるいは各々の一般的重要性は，全体的な解釈のスキームをどのように選ぶかで，大いに変わってくる．実際に，これらの問題を論議することによって，量子論のいろいろな解釈の基本的な差異があぶり出されるだろう．特に，性質と状態についてどこまで「実在論の」観点が貫けるかという質問がその1例である．各問題は古典物理学においてそれぞれ対応するものがあるので，まずこれを簡単に議論しよう．古典物理学の数学的構造や概念的枠組み (4.3節で議論した) は，これらの問題に完全に明白な解を持ち，物理学の実在論の原理と完全に整合的である．しかしいずれ説明するが，量子論での状況は非常に異なるのである．

8.2 確率の意味

確率の概念から始めよう．哲学者や確率の理論家は，平凡なコイン投げ，競馬，明日の天気，あるいは伝染病の拡散などに確率理論を応用して，この概念の意味することについて幅広く議論してきた．確率の物理学での応用は量子論に特有のことではない．実際，古典的な統計物理学についての考えは，19世紀に基礎がしっかりしていた．古典物理学で言う確率の最も広い意味は，確からしさである．このように，確率は (理想とされた) 観測者が系の特性を**知っている**程度を測る[1]．この問題での我々の無知は，系 (例えば箱の中のガス) の非常な複雑さに由来する．しかし根底にある仮定は，より詳細な観測によってあるいは詳細な理論的な計算によって，

[1] 物理で「理想とされる」というのは，相互主観的な意味である．つまり，個々の人間の心理の詳細に関わらないものとしての「知識」である．

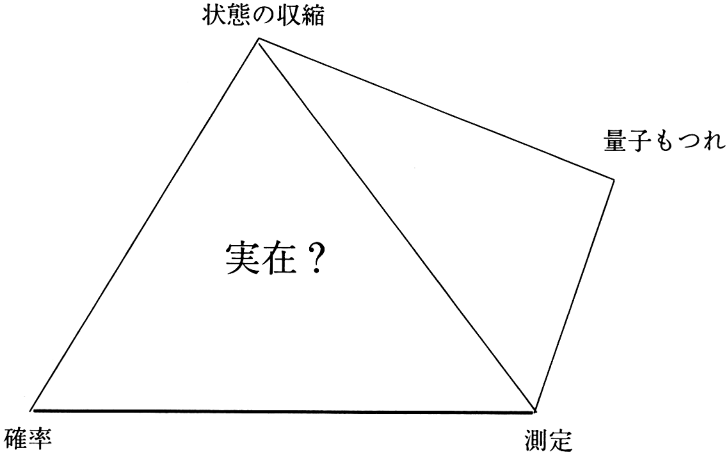


図 8.1: 問題の四つ組

原理的にこの不確定性をいくらでも小さくできる，ということである．

この立場では，古典的な状態空間 $\mathcal{S}$ の上の測度という数学的な表現によって，確率をうまく捕らえられる．これは，式 (4.11) の文脈で，4.3 節で簡単に議論した．式 (4.11) を用いるとき，任意の与えられた時刻に，たとえ我々が知らなくても，物理系が唯一の状態 $s \in \mathcal{S}$ を**持つ**と仮定していた．部分集合 $W \subset \mathcal{S}$ に対して確率測度として割り当てられる数値は，状態が W の中にある確率の数量化である．この描像の重要な性質は，実際の状態 (つまり全ての物理的な量の値) を規定するいくらでも正確な $\mathcal{S}$ の確率測度の存在である．特に，**厳密に**状態を指定する測度が存在する．すなわち，各 $s \in \mathcal{S}$ に対して,「最大情報測度」μ_s が定義されて，$s \in W$ なら $\mu_s(W) := 1$，それ以外なら $\mu_s(W) := 0$ を満たすのである．

しかし，隠れた変数を仮定しない限り量子論での状況は非常に異なる．古典的な確率測度に対応するのはヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の密度行列である．そして特別な密度行列 $P_{|\psi\rangle} := |\psi\rangle\langle\psi|$ (つまり $\mathcal{H}$ のベクトル) は，最大情報測度に対応する．一方，量子状態がベクトル $|\psi\rangle$ だと我々が知っていた

としても，理論の予測は本質的に確率的である．特に,「我々が正確な値を知らないだけだ」というミクロ状態など根底に**無い**のである．

実直に言えば，量子論のこのような確率的構造は，古典物理学の哲学とは根本的に異なっている．確からしさという確率解釈を拒絶して，量子論の確率的予測は，我々が採用した4つの規則に基づいて，準道具論，実用論の観点から理解される．つまり，同一に用意された系に対して多数回(理想的には無限回) 観測して得られる異なる結果に対して，理論はその**相対度数**を予測する．しかしこの確率的記述以上に，**個々の**系の性質については何も言わない．実際に，徹底した反実在論者ならば，ほとんどの物理量の値を保持している個々の構成要素に関して言及することさえ一貫していないと主張するかもしれない．ジョン・ベルは，古典物理学の**存在しうるもの** (beable) は**観測量**に，動詞「存在する」は「測定される」に置き換えられるべきだと言っている．(Bell 1987)

測定結果の数値しか物理的な量だと同定されないとすれば,「測定」の概念は理論の定式化において基本的役割を果たすことになる．ボーアにさかのぼる従来の見解 (一般的な論議は Scheibe (1973) を参照) では，測定装置は確固として外部の古典的な世界にあって，量子系とは明確に異なる世界に置かれている．この二元性は，物理的な世界の全てが同一の物理法則によって記述される古典物理学とは，鋭く対立している．これは測定装置とそれによって測定される系の間の相互作用にも当てはまる．従来の見解の最も熱心な支持者でさえ，実際の測定装置が，明らかに量子論の記述を要求する原子から成ること，に同意しなければならないので，この二元性の問題は量子論では決して避けられない．

量子論への実用論的アプローチは，技術的あるいは概念上の冒険的な展開を排除しないように保守的であれば，十分に無害である．しかし，実用論的アプローチこそが基本的だというのならば，その哲学の立場は潜在的に道具論である．そこでは，量子論は多数の有用な結果を導くが，科学者がたいてい仮定している観測に対する直接的な描像 (あるいは意味) を与えない．概念上の問題の多くはこの実用的アプローチに従えば確かに回避されるが，支払われる代償として，反実在論的描像は避けられない．それに対して多数の物理学者は，それが物理的世界の完全な記述だとはとても

思わないのである．

より存在論の立場に立つもう一つの選択は，確率の認識論的解釈をして実在論の立場に従うことである．例えば以前に言及したように，Margenau は，系が特定の属性を古典的な意味で「所有している」のでなく，**潜在している**という量子論の解釈を発展させた (Margenau 1949, McKnight 1952)．つまり状態がその固有状態にないとき，観測量の測定は潜在値を「実際の」値に変える．Heisenberg (1952) は彼の晩期の仕事で，類似した考えを，**潜在性**に対する古いアリストテレス学派の概念を引用して展開した．ポッパーの，**傾向** (Popper 1982) はこのタイプの概念のもう一つの例である．このように考えてくると事象の確率は，特定の結果になる内在的/潜在性/傾向の数値的な測度として，みなされなければならない．

このタイプの解釈では，測定は，潜在性から現実性への推移を誘発するというやはり基本的な役割を果たす．従って,「測定」というのが，理論の中でなんら基本的役割を担わない特別のタイプの相互作用であるのかどうかを確認していかねばならない．特に，実際の測定装置が，疑う余地無く原子から作り上げられていて，従って量子力学で記述される**まさに**量子系であることが問題なのである．

このように，量子論は 2 つの重要な問題について解答する義務がある：(i) 2 つの系の間の相互作用がいつ測定ということになるのか？そして，(ii) 測定装置の内部構造や観測過程を量子論で記述して，物理学の記述の一元性を求めていくと，結局どうなるのか? この後者の問題は特に量子宇宙論の分野で重要である．そこでは全物質の世界を一つの量子系で記述するのであるから．以降議論するが，これらの疑問のどちらにも，普遍的に受け入れられる解答を我々はまだ持たないのである．

8.3　状態ベクトルの収縮

8.3.1　数学的な側面

量子論に対する実用論的な相対度数の方法は，自らの論理の中に，以下

のような問題を含む．つまり，個々の系の連続測定に関して，測定直前には系はすべて「同じ」状態である，とはどういう意味で，どのように保証されるのだろうか? [2] **状態準備**のこの重大な問題は，状態ベクトルの収縮の考えと密接に関連がある．

測定とは，その操作が行われる直**前**の量子状態を探査する操作である．そしてそれは明確で記録可能な，その観測量に関する数値を生成する．これは，規則 3 の意味することである．一方，状態準備とは，その操作が行われた直**後**に系 (あるいはその集団) を，指定されたある状態に強制的に持ってくる操作である[3]．

測定と状態準備の概念を区別することは重要である．測定はしばしば系を破壊したり (例えば，光子はガイガーカウンターを作動させる過程で吸収される)，あるいはその測定に関する限り物理的に関心の無い系に移行させる (例えば電子が写真乾板にぶつかるとき，それは感光乳剤の成分電子の中に消失する)．しかし，これは測定結果の確率的予測に重要ではない．一方，状態準備の主要な特徴は，単に系が破壊されないだけでなく，系が —あるいはその「集団」が —ある特定な状態に準備されることである．実際問題として，特定の状態準備は特定の測定過程を含むが，状態準備の全てが従来の意味での測定であるというわけではない．

状態準備の概念は，密接に状態の収縮についての考えに関連している．付随する自己共役作用素 $\widehat{A}$ が離散的で非縮退固有値 $\{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$ を持つ観測量 A を考察しよう．物理系の集合 $\mathcal{E}$ の操作が A の**状態準備**であるとは，それが $\mathcal{E}$ の部分集合 $\mathcal{E}_m$ への分割を与え，各 $m = 1, 2, \ldots, M$ に対して，直後の A の測定が，部分集合 $\mathcal{E}_m$ の上で結果 a_m を与えることが保証されることである．この操作がまた**純粋な**測定でもあれば，パウリに

---

[2] 実用論者が「状態」というとき，それが系の複製の**全体**に対するものか，あるいは**個々**の系それぞれに対するものか，について断らない限り曖昧である．特定のある状態ベクトル $\vec{\psi}$ に対して，連続測定が適正な結果を生むために，これは重要な問題である．

[3] 以前の注意を思い出そう :「集団」という用語は，その個々の要素が物理量の値を**持って**分布していることを意味**しない**．実用論の方法または完全な道具論解釈では，理論の予測が，繰り返された測定の結果の分布だけに関わること，を示唆する語なのである．

従えば，それは A の**理想測定**であるという．

単純な例として，磁石が z-軸に沿って設置されたシュテルン・ゲルラッハの装置に，銀原子のビームを入射することを考察しよう．そして，この装置の後方に一対のフィルターを設置し，一つは上向きビームを，もう1つは下向きビームを選択するとしよう．すると，上向き (下向き) フィルターを通り抜ける原子の S_z のどんな測定も，必然的に値 $\frac{+\hbar}{2}(\frac{-\hbar}{2})$ を与える．少なくとも，結果が引き続く S_z 測定の前に記録されるという意味では，この特定の状態準備は測定で**ない**点に注意しよう．

さて，特定の部分集合 $\mathcal{E}_m$ の上の状態だけを選出したとしよう．すると，$\mathcal{E}_m$ の系に対する A の測定は，必然的に結果 a_m となる．しかし，5.1節で議論したように，確率1の予測を与える唯一の状態は作用素の固有ベクトルである．そして固有値が非縮退だと仮定するなら，これは乗数因子を除いて一意的である[4]．従って我々は，量子状態が固有ベクトル $|a_m\rangle$ であることを保証される系の集合 $\mathcal{E}_m$ を作り出すことに成功した．これは，$\mathcal{E}_m$ の系の上での更なる任意の測定が正しい確率的結果を与えるベクトルである．これは量子状態を準備する基本的な方法である．

A のそのような状態準備を，以前に特定の状態 $|\psi\rangle$ であった系の集合 $\mathcal{E}$ の上で実行するとしよう．このとき副集合の選出とは，$\mathcal{E}$ の状態 $|\psi\rangle$ が $\mathcal{E}_m$ の状態 $|a_m\rangle$ に取り替えられることである[5]．確率の相対度数解釈を使う量子論の方法では，この変化

$$|\psi\rangle \mapsto |a_m\rangle \tag{8.1}$$

は**状態ベクトルの収縮**と呼ばれている．しかしこの用語は，状態が明白に**一つの**系と関連するという解釈の理論体系でもたびたび使われる．この場合，系の一つの測定によって状態ベクトルの収縮が「起きる」と仮定される．そのような過程の存在は通常，既存の理論形式に由来したというよりむしろ**公理**として提示される．これはフォン・ノイマンの「射影公理」として知られている．更なる論議は下記参照．

---

[4] **必然的に**起こるということは，確率1で起こることと同義である．

[5] この節を通して，連続する測定の間の時間間隔は十分に小さいので，シュレーディンガー方程式を考察する必要がないと仮定している．

相対度数の方法に戻ろう．A の状態準備は，$\mathcal{E}$ を部分集合 $\mathcal{E}_m$，$m = 1, 2, \ldots, M$ へ分割するが，特定の選出をしない，という意味で全体の集合 $\mathcal{E}$ が保たれるとしよう．$\mathcal{E}$ の系の更なる測定結果の確率的分布は，どんな状態が記述するだろうか？

答はどんなタイプの状態準備がなされたかによる．例えば Wigner (1963) が指摘したように，シュテルン・ゲルラッハの装置の場合は，同じ軸に沿って配置された第二の装置を用いて，ビームを再び混合することは理論上は実行可能である．この場合には何事も無かったかのように元の状態 $|\psi\rangle$ に戻る．

しかし，最初の準備が理想測定を含むとすれば，結果を「捨ててしまう」選択，または単にそれらを記録しない操作が可能である．これは，系の特定の複製がそれぞれどの部分集合 $\mathcal{E}_m$ に属しているかについて，我々がもはや知らないことを意味する．ただ言えることは，任意の複製が特定の部分集合 $\mathcal{E}_m$ に属している確率は，A の理想測定がなされる**前に**計算された $|\langle a_m|\psi\rangle|^2$ であるということである．というのは，これが正しく $\mathcal{E}$ の部分集合 $\mathcal{E}_m$ にある系の割合[6] を記述するからである．部分集合 $\mathcal{E}_m$ の更なる予測をするための状態が $|a_m\rangle$ であることを，我々はまた知っている．

A は理想的に測定されるが，選出され**ない**で測定結果が保持されないとき，以降の測定結果を正しく予測する集合 $\mathcal{E}$ の状態は，**混合**状態 $(|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_M\rangle; |\langle a_1|\psi\rangle|^2, |\langle a_2|\psi\rangle|^2, \ldots, |\langle a_M|\psi\rangle|^2)$ であり，付随する密度行列は

$$\widehat{\rho}_{\mathrm{red}} := \sum_{m=1}^{M} |\langle a_m|\psi\rangle|^2 \, \widehat{P}_{|a_m\rangle} \tag{8.2}$$

である．数 $|\langle a_m|\psi\rangle|^2$ は，A の理想測定の直**前**にさまざまに見出される量子確率を表現するのである．一方，測定**後**は，それらの数は系がどのベクトル状態であるか (より正確には，特定の複製が $\mathcal{E}$ のどの部分集合に属するか) という我々の情報欠如を定量化する古典的確率である．「状態ベクトルの収縮」という言い方はまた，ベクトル状態 $|\psi\rangle$ から密度行列状態 $\widehat{\rho}_{\mathrm{red}}$ への推移

[6] 厳密に言うと，任意の有限集合 $\mathcal{E}_m$ に対して，この割合は量子確率の近似である．

$$|\psi\rangle \mapsto \widehat{\rho}_{\mathrm{red}} = \sum_{m=1}^{M} |\langle a_m|\psi\rangle|^2\, \widehat{P}_{|a_m\rangle} \tag{8.3}$$

を表示するためにも使われる.

解説

1. $\widehat{A}$ のスペクトルに縮退があるとすれば状況はより複雑になる. A の測定が必然的に特定の固有値 a_m を生じるという知識から, 新しい状態がその固有値の固有ベクトルのある 1 次結合であることだけがわかる.

そのような場合に, Lüders (1951) はフォン・ノイマンの射影公理を以下のように拡張した. A の理想測定が結果 a_m を与えるとすれば, 測定後の系 $\mathcal{E}_m$ の部分集合の状態は $\widehat{P}_m|\psi\rangle$ である. ここで, $\widehat{P}_m := \sum_{j=1}^{d(m)} |a_m, j\rangle\langle a_m, j|$ は, $\widehat{A}$ の固有値 a_m の固有ベクトルの部分空間上への射影作用素である. このベクトルの正規化した形は, $\widehat{P}_m|\psi\rangle / \parallel \widehat{P}_m|\psi\rangle \parallel = \widehat{P}_m|\psi\rangle / \langle\psi|\widehat{P}_m|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}$ であり, 従って収縮は

$$|\psi\rangle \mapsto \widehat{P}_m|\psi\rangle / \langle\psi|\widehat{P}_m|\psi\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{8.4}$$

となる. 図 8.2 では, 固有値 a_1 が二重縮退して, 固有値 a_2 は非縮退である例が説明されている. 射影は固有値 a_1 の二次元の固有空間の上へのものである.

$\widehat{A}$ の固有値が非縮退であるとすれば $\widehat{P}_m = |a_m\rangle\langle a_m|$ であり, 従って, 式 (8.4) の右辺は $\frac{\langle a_m|\psi\rangle}{|\langle\psi|a_m\rangle|}|a_m\rangle$ となるが, $\frac{\langle a_m|\psi\rangle}{|\langle\psi|a_m\rangle|}$ が絶対値 1 の複素数であるので, 本質的に式 (8.1) を再現する.

2. Lüders の射影公理は, 過去に盛んに議論された. この公理は多分, 退化した固有値の場合の「理想測定」の定義とみなすと良いだろう. 明らかにそれは, A を含む交換する観測量の完全系の同時理想測定をしたときどうなるかという問題に関係する.

3. 選択が行われない場合, 式 (8.4) に対応する結果を見出そう. 結果 a_m を得る確率が $\mathrm{Prob}(A = a_m; |\psi\rangle) = \langle\psi|\widehat{P}_m|\psi\rangle = \mathrm{tr}\left(\widehat{P}_{|\psi\rangle}\widehat{P}_m\right)$ だから, 式 (8.3) に対応するのは

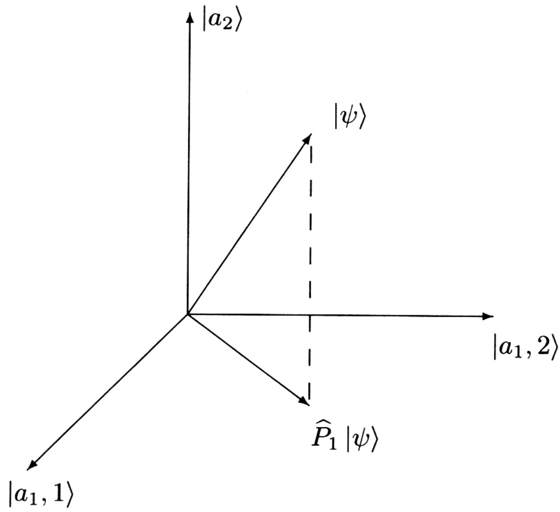


図 8.2: Lüders の射影

$$|\psi\rangle \mapsto \widehat{\rho}_{\mathrm{red}} = \sum_{m=1}^{M} \langle\psi| \widehat{P}_m |\psi\rangle \frac{\widehat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \widehat{P}_m}{\langle\psi| \widehat{P}_m |\psi\rangle} = \sum_{m=1}^{M} \widehat{P}_m \widehat{P}_{|\psi\rangle} \widehat{P}_m \tag{8.5}$$

である．ここで $\widehat{P}_{|\psi\rangle} := |\psi\rangle\langle\psi|$ である．

4. より複雑な収縮の例は，初期状態が密度行列 $\widehat{\rho}$ によって表現される**混合**状態である時である．ヒントを得るために，$\widehat{\rho}$ がベクトル状態 $|\psi\rangle$，つまり $\widehat{\rho} = \widehat{P}_{|\psi\rangle}$ の密度行列である特別な例を最初に考察しよう．収縮の式 (8.4) は密度行列の変換

$$\widehat{P}_{|\psi\rangle} \mapsto \frac{\widehat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \widehat{P}_m}{\langle\psi| \widehat{P}_m |\psi\rangle} = \frac{\widehat{P}_m \widehat{P}_{|\psi\rangle} \widehat{P}_m}{\mathrm{tr}\,(\widehat{P}_m \widehat{P}_{|\psi\rangle})} \tag{8.6}$$

に書き直せる．この表現は次のことを示唆する．初期状態が**任意の**混合状態 $\widehat{\rho}$ であり，結果 a_m を得る選択が行われたならば，この選ばれた部分集

合の上で，系の以降の測定結果を正しく予測する状態は，収縮

$$\widehat{\rho} \mapsto \widehat{\rho}_{\text{red}} := \frac{\widehat{P}_m \widehat{\rho} \widehat{P}_m}{\operatorname{tr}\left(\widehat{P}_m \widehat{\rho}\right)} \tag{8.7}$$

の右側である．

5. 最後に，初期状態が密度行列 $\widehat{\rho}$ であり，選出を行わないとすれば，収縮は

$$\widehat{\rho} \mapsto \widehat{\rho}_{\text{red}} = \sum_{m=1}^{M} \operatorname{tr}\left(\widehat{P}_m \widehat{\rho}\right) \frac{\widehat{P}_m \widehat{\rho} \widehat{P}_m}{\operatorname{tr}\left(\widehat{P}_m \widehat{\rho}\right)} = \sum_{m=1}^{M} \widehat{P}_m \widehat{\rho} \widehat{P}_m \tag{8.8}$$

である．ここで，結果 $A = a_m$ を得る元の量子確率 $\operatorname{tr}(\widehat{P}_m \widehat{\rho})$ は，実際どの結果が得られたかという古典的な不確定性を表すことになる．a_m が**非**縮退である場合の密度行列の結果の式 (8.7–8.8) は，$\widehat{P}_m$ を単に $|a_m\rangle\langle a_m|$ と書いて得られる．

8.3.2 条件付確率の役割

いろいろなタイプの状態収縮に付随する「跳躍」運動は，長年にわたって多くの論争の対象であった．それらは，量子論への実用論的な相対度数の方法においては特に問題を生じない．上で説明したように，それらは次の測定を行う前の系を単に選ぶことに相当する．

従って例えば収縮，式 (8.1) において，状態 $|\psi\rangle$ は，系の複製のはじめの集合 $\mathcal{E}$ 上でなされる測定の予測を与える．一方，収縮した状態 $|a_m\rangle$ は，A の適当な状態準備によって得られる系の部分集合 $\mathcal{E}_m$ 上でなされる測定の予測を与える．実際に，前に何度か述べたように，熱心な反実在論者は個々の系には全く状態など無いと主張するかもしれない：「状態」は繰り返し測定される系の複製の (おそらく理想的な) 集合に関してだけ意味を持つのである．しかし，状態を個々の系と結びつけようとする実在論者にとっては状況は非常に異なる：彼らは，射影公理を量子論の基本規則のう

ちの 1 つとして加えたいかもしれない．そして状態収縮を系自身の客観的変化の反映と見る．この節の終わりに簡単にこの問題に戻ろう．

状態収縮に関する「系の選出」の視点はまさに魅力的である．それは少なからず，古典的な確率論の手順とうまく結びつくように見えるからである．つまりある量 B の値の確率的予測は，他のある量 A の値についての情報が得られれば変わる．言い換えると，B の特定の値 b_n を得る絶対的確率 $\mathrm{Prob}(B = b_n)$ は，A の値が a_m であるときに b_n の値を見つけるという**条件付き**確率 $\mathrm{Prob}(B = b_n \mid A = a_m)$ に変わるのである．

これが古典物理学でどのように機能するか見るために，A と B をそれぞれ，(簡単のために) 離散[7] 集合 $a_1, a_2, \ldots, a_{M_A}$ と $b_1, b_2, \ldots, b_{M_B}$ の値をとる物理量であるとしよう．状態空間 $\mathcal{S}$ は，共通の要素をもたない部分集合 $\mathcal{S}_{A=a_m}$ に分割され，A が値 a_m を持つ場合 (つまり $f_A(s) = a_m$) に限り状態 s は $\mathcal{S}_{A=a_m}$ に属するとできる．そして同じ様にもう 1 つの分割があって，$\mathcal{S}$ を B の値によって部分集合 $\mathcal{S}_{B=b_n}$ に分割できる．物理量の値が $\mathcal{S}$ の上で，ある確率測度 μ によって確率的に分布するとすれば，A と B が値 a_m と b_n を持つ確率はそれぞれ単に

$$\mathrm{Prob}(A = a_m; \mu) = \mu(\mathcal{S}_{A=a_m}),\ m = 1, 2, \ldots, M_A \tag{8.9}$$

と

$$\mathrm{Prob}(B = b_n; \mu) = \mu(\mathcal{S}_{B=b_n})\ \ n = 1, 2, \ldots, M_B \tag{8.10}$$

である．

さて，A が値 a_m を持つことがわかったとしよう．これによって系の状態が $\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}_{A=a_m}$ にあることが知れるので，これは我々の知識を増やす．結果としてこれは B の値を予測するのに用いられる新しい状態空間になり，もっともなことだが確率測度は変わる．新しい測度 $\mu_{A=a_m}$ は，$\mathcal{S}$ の任意の部分集合 W に対する値を指定することによって定義される：

$$\mu_{A=a_m}(W) := \frac{\mu(W \bigcap \mathcal{S}_{A=a_m})}{\mu(\mathcal{S}_{A=a_m})}. \tag{8.11}$$

[7] ここで一般性は失われない．物理的な量が連続値をとる場合は，領域を独立な「区間」に分割してやればよいのである．

これは正しく規格化条件 $\mu_{A=a_m}(\mathcal{S}_{A=a_m})=1$ を満たす．特に，A の値が a_m である条件のもとで，B が値 b_n をもつ条件付確率 $\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A=a_m;\mu)$ は，

$$\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A=a_m;\mu) := \mu_{A=a_m}(\mathcal{S}_{B=b_n}) = \frac{\mu(\mathcal{S}_{B=b_n}\bigcap \mathcal{S}_{A=a_m})}{\mu(\mathcal{S}_{A=a_m})} \tag{8.12}$$

である．これは直観的な考えと一致している．つまり，$B=b_n$ と $A=a_m$ を見いだす結合確率 $(\mu(\mathcal{S}_{B=b_n}\bigcap \mathcal{S}_{A=a_m}))$ は,「$A=a_m$ を見出したときに $B=b_n$ を見出す確率」に,「$A=a_m$ を見つける絶対確率」を掛けたものに等しい．

確率測度の変化

$$\mu \mapsto \mu_{A=a_m} \tag{8.13}$$

は，A が特定の値を持つという我々の発見を反映する点に注意しよう．このようにこの変化は，はじめの測定結果を使って選択が行われる量子収縮の式 (8.1), 式 (8.4) または式 (8.7) に，古典的に対応するものである．

古典的な条件付確率の場合，A が**ある**値を持つという情報だけを得てもその値を指定しなければ，B の確率的予測が変化**しない**という事実は重要である．実際，これはあらゆる物理的な量が常に値を「持つ」というときに前提とされる性質である．そしてこの性質は,「実在論」にとっては,あらゆる物理的理論のどんな解釈においても要求される整合条件である．以下の定理は，この状況が古典的統計物理学 (そして全ての標準的確率論) でどのように満たされるかを示す．

定理

条件付確率 $\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A;\mu)$，つまり A が単に**ある**値を持つ条件の下で $B=b_n$ である確率は，絶対確率 $\mathrm{Prob}(B=b_n;\mu)$ と等しい．

証明

条件付き確率 $\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A;\mu)$ は，絶対確率 $A=a_m$ と，$A=a_m$ が与えられたときに $B=b_n$ であるという条件付確率の積の，m に関する

和であることに注意しよう：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A;\mu) &= \sum_{m=1}^{M_A} \mathrm{Prob}(A=a_m;\mu)\,\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A=a_m;\mu) \\
&= \sum_{m=1}^{M_A} \mu(\mathcal{S}_{A=a_m}) \frac{\mu(\mathcal{S}_{B=b_n} \bigcap \mathcal{S}_{A=a_m})}{\mu(\mathcal{S}_{A=a_m})} \\
&= \sum_{m=1}^{M_A} \mu(\mathcal{S}_{B=b_n} \bigcap \mathcal{S}_{A=a_m}).
\end{aligned} \tag{8.14}
$$

しかし各々の固定された n に対して部分集合 $\mathcal{S}_{B=b_n} \bigcap \mathcal{S}_{A=a_m}$，$m = 1, 2, \ldots, M_A$ は共通要素を持たない．だから確率測度の基本的加法性から，各々の $n = 1, 2, \ldots, M_B$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M_A} \mu\left(\mathcal{S}_{B=b_n} \bigcap \mathcal{S}_{A=a_m}\right) &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{M_A} \left(\mathcal{S}_{B=b_n} \bigcap \mathcal{S}_{A=a_m}\right)\right) \\
&= \mu\left(\mathcal{S}_{B=b_n} \bigcap \left(\bigcup_{m=1}^{M_A} \mathcal{S}_{A=a_m}\right)\right).
\end{aligned} \tag{8.15}
$$

第二の等式で集合の部分集合に対する分配則 $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$ を使った．しかし，$\bigcup_{m=1}^{M_A} \mathcal{S}_{A=a_m} = \mathcal{S}$，そして $\mathcal{S}_{B=b_n} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}_{B=b_n}$ である．このように，式 (8.14) は各々の n に対して

$$
\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A;\mu) = \mu(\mathcal{S}_{B=b_n}) = \mathrm{Prob}(B=b_n;\mu) \tag{8.16}
$$

を意味する． **証明終り**

さて，量子論で類似の計算を考えよう．収縮の式 (8.1) によると，A の理想的な測定が値 a_m を与えるときの適切な量子状態は $|a_m\rangle$ である．だから結果 b_n を与える，B の以降の測定の確率は

$$
\mathrm{Prob}(B=b_n \mid A=a_m) = |\langle b_n | a_m \rangle|^2 \tag{8.17}
$$

である．そしてそれは $|\psi\rangle$ とは独立であることに注意する必要がある．

この表現は，まるでそれが古典的な条件付確率の式 (8.12) に，量子論において対応するものと見られる．しかし深遠な違いがある．これを見るために，最初の量子状態が $|\psi\rangle$ であるならば，結果 $A = a_m$ を得る絶対確率が $\mathrm{Prob}(A = a_m;\, |\psi\rangle) = |\langle a_m|\psi\rangle|^2$ である点に注意しよう．だから確率 $\mathrm{Prob}(B = b_n \mid A;\, |\psi\rangle)$，つまり以前に A の理想的な測定が単にあった，という状況の元で，特定の結果 $B = b_n$ が得られる確率は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(B = b_n \mid A;\, |\psi\rangle) &= \sum_{m=1}^{M_A} \mathrm{Prob}(B = b_n \mid A = a_m)\mathrm{Prob}(A = a_m;\, |\psi\rangle) \\
&= \sum_{m=1}^{M_A} |\langle b_n|a_m\rangle|^2\, |\langle a_m|\psi\rangle|^2 \\
&= \sum_{m=1}^{M_A} \langle\psi|a_m\rangle\langle a_m|b_n\rangle\langle b_n|a_m\rangle\langle a_m|\psi\rangle \qquad (8.18)
\end{aligned}$$

である．同じことではあるが，式 (8.3) の縮約された密度行列 (それは，A の理想的な測定の結果に言及しない状況を適切に表現する) を考えれば，直接

$$\mathrm{Prob}(B = b_n \mid A;\, |\psi\rangle) = \mathrm{tr}\left(\widehat{\rho}_{red}\widehat{P}_{|b_n\rangle}\right) = \sum_{m=1}^{M_A} |\langle a_m|\psi\rangle|^2 \mathrm{tr}\left(\widehat{P}_{|a_m\rangle}\widehat{P}_{|b_n\rangle}\right) \qquad (8.19)$$

となり，これは上と同じ結果を与える．

他方，B の測定で結果 b_n を得る絶対確率は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(B = b_n;\, |\psi\rangle) &= |\langle b_n|\psi\rangle|^2 \\
&\equiv \sum_{m_1=1}^{M_A} \sum_{m_2=1}^{M_A} \langle\psi|a_{m_1}\rangle\langle a_{m_1}|b_n\rangle\langle b_n|a_{m_2}\rangle\langle a_{m_2}|\psi\rangle \quad (8.20)
\end{aligned}$$

であり，これは式 (8.18) とは異なる．

このように，量子論の条件付確率は古典的なものとは異なる．特に B の値の古典的な確率分布は，A がある値を持っているという事実に**依存し**

ない．しかし，B の測定に対する量子力学の予測は，A の理想的な測定が前もって実行されたという事実に**依存する**．

読者は，量子条件付確率の，この明らかに直観に反したふるまいは必然であると主張するかもしれない．つまりいつも言われているように，量子測定値 (「理想的な」ものでさえ) は『系の制御不能な揺動』を引き起こす．そしてこれは，A の最初の理想的な測定がまさに引き起こしたものである．従って以降の B の測定が，A の測定が無かった場合と比べて，異なる確率分布をすることは驚くべきことではない．しかしそのような言い方は，個々の系に客観的な特性を付与しない量子論をどのように解釈しても紛らわしい．もともと付随する特性がないならば，測定はどのように，制御不能な（または別な）方法で，それらに影響することができるのだろうか？せいぜい言えるのは，測定が後の測定で異なる結果を与えるようになる**潜在性**において制御不能の揺動を生じるということである．しかしこれは，論点からして異なる問題であろう．

8.3.3　実在論における問題

上の議論は，量子論への実用論的アプローチに基づいていて，相当極端な道具論の解釈にもそのまま十分にあてはまる．しかし状態ベクトルの収縮についての考えは，状態ベクトルを 1 個の系に対応させる実在論のアプローチにおいて，より多く議論されてきた．つまり収縮は **1 つの** (理想的な) 測定後に起こり，一連の繰り返された測定における系の選択とは関係が無いと仮定される．この観点からすると，1 個の系の状態の大局的な時間発展は，測定の行為によって生じる鋭い跳躍，及びそれらの間の区間での規則 4 のシュレーディンガー方程式に支配される決定論的な発展，の両過程で記述される．

大きな問題は，この状態の急激な変化の起源を理解することである．特に，それは既存の量子論の枠組みから得ることができるのか，あるいは状態ベクトルの収縮は基本的な仮定として量子論の一般的な原則に加えられなければならないのだろうか？この問題は理論の定式化において，「測定」

を基本的な要素として考えない量子論へのあらゆるアプローチにおいて特に緊急性がある．これは既存の枠組みから状態収縮を引き出そうとする強い動機づけになる．それは多分実際には，状態の時間発展に対する経験的に有用な近似に過ぎないかもしれないが．

問題の本質は，部分的には状態の定義による．もし状態が，系についての我々の**知識**を定量化するものであるとすれば，収縮過程はおそらく古典的な確率の条件付け手順に類似していて，実際に何が起こったかという情報の増加が，我々の知識の状態を変えるのである．他方状態ベクトルが，系そのものについての記述であるとすれば，収縮についての考えはしばしば「制御不能の揺動」の主張に絡んでくる．これは，直接的な物理用語を用いてこの影響の本質を理解することが可能かどうかという問題を提起する．特にどんな相互作用が「理想的な測定」として用いられるのだろうか？

この問題への 1 つのアプローチは，実際の測定装置が量子論的原子でできているという事実の重要性について再考することである．対象と装置は両方とも量子力学系だと考えて，何らかの時間発展の結果として，状態収縮を理解することが可能だろうか？実際に，量子論への最小の実用論的アプローチの範囲内でさえ，2 つの系の間のどんな**タイプ**の相互作用が**純粋な**測定とみなされるのか，と問うのは意味がある．測定の概念は，量子論の定式化で基本的な役割を演じるので，さらによく探究する価値があるだろう．

8.4 量子もつれ

8.4.1 2 つのヒルベルト空間のテンソル積

純粋な物理的過程として測定の過程を記述するどんな試みも，必ずすぐに量子もつれの現象に遭遇する．これは，我々の基本問題リストの第 4 項目のものであり，量子論の最も独特な特徴である．

量子もつれは，構成部分系をベクトル状態として記述**できない**合成量

子系 (またはそのような系の適当な「集合」) に対して生じる．従って，部分系 S_1 と S_2 の状態空間がそれぞれヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ であるとして，$S_1 + S_2$ の合成系の状態空間を研究することからはじめよう．古典物理学の類似した状況は非常に明白である．$S_1 + S_2$ の (微視的) 状態は，s_1 と s_2 がそれぞれ S_1 と S_2 の状態であるような全てのペア (s_1, s_2) から成る．このように，$S_1 + S_2$ の状態空間は，まさに直積 $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ である．特に，合成系のどの微視状態も，その構成部分系の各々の微視状態と一意的に関係している．

スピン 1/2 の粒子とスピン 1 の粒子からなる量子系の例を考えよう．単にスピンに注目しよう．粒子の空間の特性と関連する自由度を無視して，部分系の状態空間はそれぞれ，$\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{C}^3$ である．そして，典型的な基底系は，スピン作用素の z-成分の固有状態から構成して $\{|+\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle\}$ 及び $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ である．自然な物理的仮定は，各々の粒子が許容される S_z 値のうちの 1 つをとる状態を，合成系が含むということである．明らかに 6 つの状態がある．

$$|+\tfrac{1}{2},+1\rangle,\ |+\tfrac{1}{2},0\rangle,\ |+\tfrac{1}{2},-1\rangle,\ |-\tfrac{1}{2},+1\rangle,\ |-\tfrac{1}{2},0\rangle,\ |-\tfrac{1}{2},-1\rangle. \quad (8.21)$$

例えば，$|+\frac{1}{2},+1\rangle$ は，最初の粒子は $\frac{1}{2}\hbar$ の S_z を持つ状態で，第二の粒子は，$1\hbar$ の S_z を持つ状態である．より正確に言えば，両粒子のスピンの z-成分が，それぞれ作用素 $\widehat{S}_z^{(1)}$ と $\widehat{S}_z^{(2)}$ によって合成系のヒルベルト空間上で表現されると仮定するのである．さらに，これら二変数は同時に[8] 測定できると想定されているので，

$$[\,\widehat{S}_z^{(1)}, \widehat{S}_z^{(2)}\,] = 0 \quad (8.22)$$

である．すると式 (8.21) の状態は，これら作用素の同時固有ベクトルを示す．例えば，$\widehat{S}_z^{(1)}|+\frac{1}{2},+1\rangle = \frac{1}{2}\hbar|+\frac{1}{2},+1\rangle$ そして $\widehat{S}_z^{(2)}|+\frac{1}{2},+1\rangle = \hbar|+\frac{1}{2},+1\rangle$ など．

量子論を扱っているので，思いがけない超選択則が無い場合には，上記の状態の線形結合が許されるだろう．実際，最も一般的な状態が次の形式

[8] しかし，同時に測定できる二変数についての 6.3 節の議論を思い出そう．

に書かれることは自然であろう．

$$|\psi\rangle = \psi_{+\frac{1}{2},+1}\,|+\tfrac{1}{2},+1\rangle + \psi_{+\frac{1}{2},0}\,|+\tfrac{1}{2},0\rangle + \psi_{+\frac{1}{2},-1}\,|+\tfrac{1}{2},-1\rangle$$
$$+\psi_{-\frac{1}{2},+1}\,|-\tfrac{1}{2},+1\rangle + \psi_{-\frac{1}{2},0}\,|-\tfrac{1}{2},0\rangle + \psi_{-\frac{1}{2},-1}\,|-\tfrac{1}{2},-1\rangle. \tag{8.23}$$

このように，式 (8.21) のベクトルが合成系のヒルベルト空間の基底系をつくる．6 個のベクトルがあるので，この空間は $\mathbf{C}^6$ に同形である．

一般的合成系に対して，重要な数学的操作は，それぞれヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ のベクトル $\vec{\psi_1}$ と $\vec{\psi_2}$ を，新しいヒルベルト空間のベクトル $\vec{\psi_1}\otimes\vec{\psi_2}$ に変換するものである．このヒルベルト空間は，$\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の**テンソル積** $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ として知られている．従って，合成系の量子状態空間は，その構成部分系の量子状態空間のテンソル積である．上の例では，ベクトル $|+\frac{1}{2},+1\rangle$ はテンソル積 $|+\frac{1}{2}\rangle\otimes|+1\rangle$ を表す．特に，テンソル積 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ は $\mathbf{C}^6$ に同形である．

テンソル積演算の完全な定義はかなり複雑であるが，我々の目的のためには，以下の記述で十分である．

(a) テンソル積演算は，各々の「区分」で，以下の意味で線形である．任意の $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$，$\vec{\psi},\vec{\phi}\in\mathcal{H}_1$，$\chi\in\mathcal{H}_2$ に対して，

$$(\alpha\vec{\psi}+\beta\vec{\phi})\otimes\vec{\chi} = (\alpha\vec{\psi})\otimes\vec{\chi} + (\beta\vec{\phi})\otimes\vec{\chi}, \tag{8.24}$$

そして任意の $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$，$\vec{\psi}\in\mathcal{H}_1$ と $\vec{\phi},\vec{\chi}\in\mathcal{H}_2$ に対して

$$\vec{\psi}\otimes(\alpha\vec{\phi}+\beta\vec{\chi}) = \vec{\psi}\otimes(\alpha\vec{\phi}) + \vec{\psi}\otimes(\beta\vec{\chi}) \tag{8.25}$$

である．

さらに，複素数による掛け算は，任意の $\alpha\in\mathbf{C}$，$\vec{\psi}\in\mathcal{H}_1$ と $\vec{\phi}\in\mathcal{H}_2$ に対して，テンソル積記号を自由に飛び越して

$$\alpha(\vec{\psi}\otimes\vec{\phi}) = (\alpha\vec{\psi})\otimes\vec{\phi} = \vec{\psi}\otimes(\alpha\vec{\phi}) \tag{8.26}$$

である．

(b) どんな $\vec{\psi} \in \mathcal{H}_1$，$\vec{\phi} \in \mathcal{H}_2$ を持ってきても，一個の積 $\vec{\psi} \otimes \vec{\phi}$ として**書けない** $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ のベクトルが存在する．しかし，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ のあらゆるベクトルは，$\vec{\psi} \otimes \vec{\phi}$ のような積ベクトルの**和として**表される．

特に，$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{N_1}\}$ と $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_{N_2}\}$ がそれぞれ $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の基底ベクトルの組であるならば，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の基底は，ベクトル $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$，$i = 1, 2, \ldots, N_1$，$j = 1, 2, \ldots, N_2$ の組である．このように，最も一般的なベクトル $\vec{\psi} \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ は，

$$\vec{\psi} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j \tag{8.27}$$

と書ける．特に，これはヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の次元が $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ それぞれの次元の積であることを示す．(ここでは $\infty \times \infty = \infty$ と考えてよい．) 従って当然，上で考えられた例は，$\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ と $\mathbf{C}^6$ の同形に対応する．

(c) スカラー積は，積ベクトルの上で次のように定義される

$$\langle \vec{\psi}_1 \otimes \vec{\psi}_2, \vec{\phi}_1 \otimes \vec{\phi}_2 \rangle := \langle \vec{\psi}_1, \vec{\phi}_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \vec{\psi}_2, \vec{\phi}_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{8.28}$$

右辺のスカラー積は，表示されたヒルベルト空間において計算される．この表式は，以下のように定義することによって，ベクトルの和にまで広げられる

$$\begin{aligned}\langle \vec{\psi}_1 \otimes \vec{\psi}_2,\ (\alpha \vec{\phi}_1 \otimes \vec{\phi}_2 + \beta \vec{\phi}_3 \otimes \vec{\phi}_4) \rangle :=& \\ \alpha \langle \vec{\psi}_1, \vec{\phi}_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \vec{\psi}_2, \vec{\phi}_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} + \beta \langle \vec{\psi}_1, \vec{\phi}_3 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \vec{\psi}_2, \vec{\phi}_4 \rangle_{\mathcal{H}_2}&.\end{aligned} \tag{8.29}$$

そして，左部分に線形和を含むスカラー積の場合も同様である．

(d) 作用素のテンソル積もまた定義できる．具体的には，$\widehat{A}_1$ と $\widehat{A}_2$ がそれぞれ $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の作用素であれば，テンソル積 $\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2$ は以下によってまず積ベクトルに対して定義される

$$(\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2) \vec{\psi}_1 \otimes \vec{\psi}_2 := (\widehat{A}_1 \vec{\psi}_1) \otimes (\widehat{A}_2 \vec{\psi}_2). \tag{8.30}$$

それから，明白な線形性を用いて不定性無しに積ベクトルの和に一般化する．特に，式 (8.27) の展開を用いて

$$(\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2)\vec{\psi} := \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij}(\widehat{A}_1 \vec{e_i}) \otimes (\widehat{A}_2 \vec{f_j}) \tag{8.31}$$

となる．

ベクトルの場合と同様，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の作用素には，$\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2$ の形式に書けないものがある．しかし全ての作用素は，$\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2$ の積作用素の和に表される．

解説

1. ディラック記法では，2 つの状態 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ のテンソル積は $|\psi\rangle\,|\phi\rangle$ と書く．従って，上の単純な例では，$|+\frac{1}{2}, +1\rangle$ は積状態 $|+\frac{1}{2}\rangle\,|+1\rangle$ と書ける．

2. 系 1 の観測量 A_1 は，作用素 $\widehat{A}_1 \otimes \widehat{\mathbb{1}}$ によって合成系で表現される．同じように，系 2 の観測量 A_2 は，$\widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{A}_2$ によって表現される．従って，上の例では，$\widehat{S}_z^{(1)}$ は $\widehat{S}_{z1} \otimes \widehat{\mathbb{1}}$ であり，$\widehat{S}_z^{(2)}$ は $\widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{S}_{z2}$ である．ここで，$\widehat{S}_{z1}$ と $\widehat{S}_{z2}$ はそれぞれ $\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{C}^3$ の上のスピン z 成分の作用素を表す．

たとえ $\widehat{A}_1$ が $\mathcal{H}_1$ の上で退化していなくても，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に作用する作用素 $\widehat{A}_1 \otimes \widehat{\mathbb{1}}$ は任意のベクトル $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$ に対して $(\widehat{A}_1 \otimes \widehat{\mathbb{1}})\,|a\rangle\,|\phi\rangle = a\,|a\rangle\,|\phi\rangle$ なので，非常に縮退していることに注意しよう．

3. A_1, A_2 がそれぞれ系 1 と 2 の観測量ならば

$$[\widehat{A}_1 \otimes \widehat{\mathbb{1}}, \widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{A}_2] = 0 \tag{8.32}$$

であり，これは合成系に対して A_1 と A_2 が自明に両立することを意味する．(つまり それらは問題なく同時に測定できる)．この考えの簡単な例は，式 (8.22) である．

さらに，$|\psi\rangle$ が積状態 $|\psi_1\rangle\,|\psi_2\rangle$ ならば，$\widehat{A}_1$ と $\widehat{A}_2$ が両方とも非縮退であることを簡単のために仮定すると，これらの観測量の合成系に対しての確率分布は，個々の構成系に対するものを再現する．より正確には次のよ

うである．両立する観測量 $\widehat{A}_1 \otimes \widehat{\mathbb{1}}$ と $\widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{A}_2$ は，同時固有ベクトルの完全な集合をもつ．それは明らかに，a_1 と a_2 をそれぞれ $\widehat{A}_1$ と $\widehat{A}_2$ のすべての固有値として，$|a_1\rangle\,|a_2\rangle$ である．従って積状態は，(**cf.** 式 (6.32))

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(A_1 = a_1, A_2 = a_2; |\psi_1\rangle\,|\psi_2\rangle) \\
&= \left|\big(\langle a_1|\,\langle a_2|\big)\big(\,|\psi_1\rangle\,|\psi_2\rangle\big)\right|^2 \\
&= \left|\langle a_1|\psi_1\rangle_{\mathcal{H}_1}\right|^2 \left|\langle a_2|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}_2}\right|^2
\end{aligned} \tag{8.33}
$$

となる．他方，1 個の系の予測は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(A_1 = a_1; |\psi_1\rangle) &= \left|\langle a_1|\psi_1\rangle_{\mathcal{H}_1}\right|^2 \\
\mathrm{Prob}(A_2 = a_2; |\psi_2\rangle) &= \left|\langle a_2|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}_2}\right|^2
\end{aligned} \tag{8.34}
$$

なので，

$$
\mathrm{Prob}(A_1 = a_1, A_2 = a_2; |\psi_1\rangle\,|\psi_2\rangle) = \tag{8.35}
$$

$$
\mathrm{Prob}(A_1 = a_1; |\psi_1\rangle)\,\mathrm{Prob}(A_2 = a_2; |\psi_2\rangle) \tag{8.36}
$$

である．この結果は，式 (8.28) をテンソル積空間上のスカラー積の定義として選ぶ物理的正当化になっている．

4. テンソル積は，スピンを持つ電子の完全なヒルベルト空間を構成するのに用いられる．この粒子の空間自由度 (簡単のために一次元の運動を考える) は波動関数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ によって普通に記述される．そして，スピン自由度にはヒルベルト空間 $\mathbb{C}^2$ を使う．両方の自由度を記述するヒルベルト空間は，テンソル積 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ である．つまり 空間とスピンの自由度は，それらが完全な電子系の部分系であるように扱われる．積ベクトルの重要な組は，$|x\rangle|\uparrow\rangle$ または $|x\rangle|\downarrow\rangle$ のタイプの集合である．ここで，$|x\rangle$ は $\widehat{x}$ の連続的固有値 x の (一般化された) 固有状態を示す．従って例えば，$|x\rangle|\uparrow\rangle$ は位置が x で，内部スピンの z 成分が $+\frac{1}{2}\hbar$ である電子を表す．そして $|x\rangle|\downarrow\rangle$ も同様である．

より厳密には，$L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ の一般的な状態は，形式

$$
\vec{\chi} := \psi_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.37}
$$

で書ける．ここで，$\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ であり，$\binom{1}{0}$ と $\binom{0}{1}$ は，S_z の表現が $\widehat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる $\mathbb{C}^2$ の基底をとったときの固有状態 $|\uparrow\rangle$，$|\downarrow\rangle$ である．

8.4.2 量子もつれの概念

量子もつれは，数学的には，単純な積形式 $\vec{\psi_1} \otimes \vec{\psi_2}$ で書けない $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ のベクトルの存在に関連している．そしてそれは部分系 S_1，S_2 のベクトル状態と直接には関係していない．もちろん 1 つの可能性として，このタイプの状態が実際には決して起こらないと仮定することもできるかもしれないが，実際には，電子の z-軸に沿ったスピンを測定するときに，このタイプの状態はまさに実現するのである[9]．

この場合の測定の結果は，「スピンアップ」または「スピンダウン」であり，固有値ではそれぞれ $S_z = \frac{1}{2}\hbar$ と $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ に，固有ベクトルでは $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ に対応する．さて，装置自身が量子力学で記述できると想定しよう．これは，全ての物質が原子でできているので合理的な仮定である．もちろん，装置が適当な測定装置として働くためには，その状態は電子との結合に応じて適切に変化しなければならない．

これがどのように働くか見るために，今 3 つの可能な値 A_0，$A_\uparrow$，$A_\downarrow$ を持つ，装置の観測量 (例えば目盛り盤の指針の位置) があると想定しよう．ここで，A_0 は入力の無い待ち状態の針の位置（中間値），$A_\uparrow$，$A_\downarrow$ は電子の測定結果がそれぞれスピンアップ，ダウンを示す針の位置，に対応する観測量の値である．このように，装置の量子力学的記述において，3 つの固有値を持つある自己共役作用素があると想定している．すなわち固有値 A_0，$A_\uparrow$，$A_\downarrow$ に対してそれぞれの固有ベクトルは $|A_0\rangle$，$|A_\uparrow\rangle$，$|A_\downarrow\rangle$ である．

さて，量子状態 $|A_0\rangle|\uparrow\rangle$ にある，電子と装置の合成系の多数の複製を

[9] 量子もつれの現象は，測定の相互作用に特有でない．それは，他の多くの状況においても起こる．しかし，測定の例は特に印象的で，それは量子論で悪名高い「測定問題」に至るのである．

考えよう．すると，ある第 2 の装置によるこの第 1 の装置の測定は，確率 1 で，中間値 A_0 を与える．そして，ある第 3 の装置による電子スピンの測定は，確率 1 で，スピンアップを与える．この確率 1 の状況では，合成系の個々の部分，つまり装置が値 A_0 を**持ち**，電子がスピンアップの値を**持つ**ということに意味がある．

装置と電子が相互作用する間，この状態ベクトルは，時間に依存するシュレーディンガー方程式によって発展する．そして測定が終わったとき，それは変換

$$|A_0\rangle|\uparrow\rangle \longrightarrow |A_\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \tag{8.38}$$

を受けた状態になっている．ここで，電子の最初の状態が変わらないような相互作用を仮定した．同じように，初期状態がスピンダウンであるならば，測定結果は変換

$$|A_0\rangle|\downarrow\rangle \longrightarrow |A_\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \tag{8.39}$$

によって記述される．

これらの方程式の解釈は明快である．例えば，式 (8.38) の右辺が明らかに記述するのは，装置がスピンアップに対応する状態に移行し，電子スピンの状態は測定前と同じである状況である．式 (8.39) についても同様である．これらは集団の個々の合成系にあてはまる点に注意しよう．というのは，式 (8.38–8.39) の右辺が適切な作用素の固有状態であるからである．

しかし，電子の初期状態が $\widehat{S}_z$ の固有状態で**なくて**，線形結合 $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ $(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ と規格化されている) であるとしよう．この状態を作ることは簡単である．例えば $|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$ は $\widehat{S}_x$ の x 方向に向いた固有ベクトルである．従って $|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$ を準備するためには，S_z-測定の前に，S_x の固有状態に対して値 $\frac{1}{2}\hbar$ を与える系を選べばよい．この方法は一般に使える．というのは形式 $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ のどんなベクトルも，**ある**軸に沿ってのスピンの固有ベクトルだからである．

測定前の合成系の集合の量子状態は $|A_0\rangle(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)$ であり，シュレーディンガー方程式による時間発展が**線形**であるので，測定の相互作用でこれは式 (8.38) と式 (8.39) の適切な**和**に発展しなければならない．つ

まり

$$\boxed{|A_0\rangle(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \longrightarrow \alpha\,|A_\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta\,|A_\downarrow\rangle|\downarrow\rangle.} \tag{8.40}$$

この状況の具体的な例は，シュテルン・ゲルラッハの装置である．入って来るスピン 1/2 の原子は，磁場の勾配方向へのスピンの値に依存して，この勾配の順方向あるいは逆方向に動かされる．原子の最終的な位置は，上で述べた観測装置の指針に相当すると考えていいだろう． つまり それがスクリーン (あるいは何でも) に当たる 2 つの可能な位置を $z_\uparrow$ と $z_\downarrow$ であるとすれば，この位置を知ればスピンの値を知ることになる[10]．だが，シュテルン・ゲルラッハの装置に入って来る原子のスピン状態がある線形の**重合せ** $|z_0\rangle \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)$ ならば，それがスクリーンに当たる直前に，原子は線形結合 $\alpha\,|z_\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta\,|z_\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$ によって記述される．

重要な概念上の問題は，式 (8.40) の右辺の意味である．最終状態は，積ベクトルの**重合せ**であって，原子か装置 (またはそれの集合) の特定の状態ではない．特に，状態収縮が起こっていないし，可能な測定過程の両方とも同等である．これは,「量子もつれ」の良い例である．合成系の各部分系が初期に積ベクトルであったとしても，それらが相互作用したあと，合成系の状態は一般に積状態の線形結合になる．9 章で見るように，量子もつれのこの現象は，有名なアインシュタイン・ポドルフスキー・ローゼンのパラドックスの定式化で基本的な役割を演ずる．

両方の部分系が原子サイズ以下ならば，もつれの現象は許容できるかもしれない． 実際に，パウリの排他原理によれば，電子のどんなペアも必然的にあるもつれ状態に存在する．しかし上のように，部分系のうちの 1 つが装置の巨視的な部分であるとき，この描像は非常に特異に見える．悪名高いシュレーディンガーの猫のパラドックス[11] は，このタイプのもう一

---

[10] この記述は少し不正確である．以前に議論したように，シュテルン・ゲルラッハの装置は，理想的なものかどうかにかかわらず，測定で**ない**形で状態準備をする．従って，原子位置の以降の**測定**がスピンの値を明らかにする，と言うほうが正確である．この意味で，シュテルン・ゲルラッハの装置は量子力学的測定系の良い例ではない．しかし，もつれた状態がどのように生じるかについて示す明快な例である．

[11] シュレーディンガーの有名な論文の翻訳は Wheeler & Zurek (1983) 参照.

つの例である．

明らかにこの問題は，巨視的なシステムがそのマクロ的性質を記述する総体的な観測量の固有状態の線形結合で存在できるかどうか，また存在するならこのことが何を意味するかという問題と関連する．しかし，量子もつれの問題はもっと複雑で，巨視的な部分系 (またはそれの集合) を記述する状態が，固有状態の線形結合でさえないかもしれない．

量子もつれの現象は，物質の全体論的な構造を暗示する．それは，合成系は構成部分系の分析で理解できるという西洋哲学の還元論的見解と鋭い対照をなす．しかも，普通に経験する実際のマクロ系の振る舞い—おそらく西洋哲学がその発展の基礎においた様相—とも異なる．結果として量子論の数学的構造を変える多くの試みがなされた．例えば，それが過去にどのような相互作用をしたかにかかわらず，巨視的な系は，自動的にそれ自体のもつれを解消する，という試みがある．あるいは，状態ベクトルがその時間発展の一部として，客観的な波束の収縮を生じるという試みもある．測定問題を解決するこれらの試みを次の節で議論しよう．

8.5　測定の問題

8.5.1　問題の性質

最も一般的なレベルで,「測定問題」は量子論の基礎における測定の役割全ての面と関連している[12]．この試みの詳細は，言うまでもなく，全体的な理論形式の解釈に強く依存する．実際に最も研究されている問題は，もつれた対象系＋装置のシュレーディンガー時間発展する状態ベクトルが，いかに状態収縮の描像と相容れるかということである．この質問は，収縮の種類によって異なる形になる．式 (8.1)，式 (8.4)，式 (8.7) のタイプは，(道具論の言語では) 測定の結果を選択するとき，式 (8.3)，式 (8.8) のタ

[12] 測定問題についての原著と解説の包括的な文献は，Wheeler & Zurek (1983) である．もっと新しい解析は Busch et al. (1991) にある．

イプは，選択しないときである．

それが選択的な状態準備と関係しているので，収縮，式 (8.1)($|\psi\rangle \mapsto |a_m\rangle$) は実用論または道具論にとっては問題を起こさない．この場合は系の外に観測の主体があり，シュレーディンガー時間発展による観測過程の記述を求める理由は無い．確かに，最も熱心な道具論者でさえ，一つの測定で得られる**実際の**結果に対して，なぜそうなるのかという理由を科学的に問いたくなるかもしれない．そしてこれもおそらく「測定問題」の一側面であろう．しかし，そのような探索は，量子論のこれら特定の解釈の枠組みを遥かに逸脱してしまうだろう．

$|\psi\rangle \mapsto |a_m\rangle$ について**実在論**に課された問題は全く異なる．実際に，量子論の解釈が答えなくてはならないのは，そのような過程が実際**どのように進行するのか**である．「事実」はどこから来るか？特に，実在論は収縮 $|\psi\rangle \mapsto |a_m\rangle$ を，(i) 個々の系の状態の客観的変化，そして，(ii) 直接に『A が値 a_m』を持つという事実の「発現」と関係している何か，とみなしたくなるだろう．量子論への道具論的アプローチにおいて，潜在性から現実性への移行は，測定装置 (理想的なものにせよそうでないものにせよ) と関係している．そして観測装置の内部記述は，必然的に理論の領域の**外**にある．しかしこの考え方は，測定にはある特定の物理的相互作用が関与するとして，すべて量子論から説明しようとするいかなる解釈からも否定される．

第二のタイプの収縮 $|\psi\rangle \mapsto \rho_{\mathrm{red}} = \sum_{m=1}^{M} |\langle a_m|\psi\rangle|^2 \widehat{P}_{|a_m\rangle}$ を取り巻く問題は，$|\psi\rangle \mapsto |a_m\rangle$ と異なって，電子スピンの測定の例でうまく表現される．上で示されたように，装置＋電子の合成量子系がシュレーディンガー方程式によって発展し，もつれ状態を与えるとすると，

$$|\psi_{\mathrm{entan}}\rangle := \alpha\,|A_\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta\,|A_\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \tag{8.41}$$

であり，一方，結果の選択なしにスピンの測定が完了するということは密度行列

$$\rho_{\mathrm{red}} = |\alpha|^2\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\beta|^2\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \tag{8.42}$$

を与える．この場合，両方とも電子の**特定の**測定結果が記録されないという点は同じなので，これら二つは異なる状態であるけれども，何らかの意

味で両立しなければならない．しかし，これらは確かに同じものではない．式 (8.41) は合成系のヒルベルト空間のベクトル状態であるのに，式 (8.42) は単独で電子のヒルベルト空間の**混合状態**である．

これらの状態が異なることは，現実論のアプローチの擁護者にとっては当然である．というのは，それらは 2 つの完全に異なるやり方において招来されたのだから．唯一の問題は，それらがこのアプローチの範囲内で，相互に整合的であることを示すことである．まもなくこの問題を議論しよう．

しかし，実在論の見解は異なる．最初の問題は，式 (8.41) のもつれた状態と，観測装置などの古典的な対象系がいつも「巨視的」物理量に対して値を持つという考えとの折り合いを考えることである．これは合成系の上での測定結果だけに関係していて，式 (8.41) を解釈する実用論には問題ではない．下記参照．

第 2 に，状態を個々の系に割り当てる実在論では次のように主張するだろう．(i) 収縮，式 (8.42)(あるいは式 (8.42) が近似する何か) は装置＋電子の一個の複製にもあてはまるとする．そして，(ii) 収縮はこの閉じた系の内部の力学的変化に起因しなければならない．従って問題は，もつれた状態のベクトルの式 (8.41) から，式 (8.42) が，合成量子系，装置＋対象系に対してどのように**導かれるか**である．

この問題は，時間に依存するシュレーディンガー方程式によって，ベクトル状態 $|\psi\rangle$(または，特別なタイプの密度行列 $\widehat{P}_{|\psi\rangle}$) が，自明でない密度行列 (つまり あるベクトル $|\phi\rangle$ に対して形式 $\widehat{P}_{|\phi\rangle}$ では書けない状態) には決して発展しないという事実によって顕著になる．[演習問題]．従って，式 (8.3) のような移行が，どのように正確に標準量子論の枠組みを使って記述できるのかを見ることは難しい．せいぜい期待されるのは，式 (8.41) のようなもつれた状態が,『実際の目的ではたいてい』混合状態の式 (8.42) に同等であるということである．

8.5.2 現実的視点

上述したように，現実論のアプローチの観点からは本当の測定問題は存在しない．状態，式 (8.41) と式 (8.42) は，2 つの完全に異なる方法において得られる— 前者は内的なシュレーディンガー方程式から，後者は結果を選択しない一連の繰り返された理想的な測定から．— 従って，これらが等しくなければばならない特別な理由は無い．

他方，2 つの状態，式 (8.41) と式 (8.42) の間に特定の**整合性**を示す必要がある．相対度数解釈によれば，もつれた状態，式 (8.41) の物理的重要性は，外部にある**第二の測定装置**で，装置＋系のたくさんの複製に対して一連の連続測定をすることによって引き出せることである．例えば，測定装置に対する一連の繰り返された (理想) 測定において，特に結果 $A_{\uparrow}$ を与える合成系だけ選出 (式 (8.41) によるとその割合は $|\alpha|^2$ だけある) したとき，系のこの部分集合に対する更なる測定の結果を予測する正しい状態は，還元されたベクトル $|A_{\uparrow}\rangle|\uparrow\rangle$ である．従って，電子スピンの z 成分の測定がこの部分集合の各要素の上でなされれば，理論は必然的に $+\frac{1}{2}\hbar$ という結果を予測する．同じように理論は，装置の測定結果 $A_{\downarrow}$ と電子スピンの測定結果 $-\frac{1}{2}\hbar$ との間に 100%の相関を予測する．このようにスピンに対する予測は式 (8.42) と一致している．

この過程は際限なく拡大できる．第二の測定装置＋装置＋系 (第二の測定装置が理想的な測定を実行したと仮定する) を第 3 の測定装置で測定し，それをさらに第 4 の測定装置で測定する，などなど.... 従って，最小の，実用論的アプローチは，量子力学の用語で現実の測定装置を扱うことが可能である点で**一貫している**．しかしそれはこの点を越える発展は無い．

8.5.3　伝統的な解決

実在論による測定問題への 1 つのアプローチは，観測問題など存在しないというものである．これに反して，もつれた状態，式 (8.41) は，混合状態，式 (8.42) を「説明」するために**必要**である．議論は，技術的には上の整合性の議論と同じである．電子の物理量 B を調べたいというとき，2 つの状態によって与えられる予測はどのように異なるだろうか？合成系のヒルベルト空間では，B は作用素 $\widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{B}$ によって表現されるので，

$$\langle B \rangle_{\psi_{\mathrm{entan}}} = \langle \psi_{\mathrm{entan}} | \, \widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{B} \, | \psi_{\mathrm{entan}} \rangle = |\alpha|^2 \langle \uparrow | \widehat{B} | \uparrow \rangle + |\beta|^2 \langle \downarrow | \widehat{B} | \downarrow \rangle \tag{8.43}$$

ここで直交関係 $\langle A_{\uparrow} | A_{\downarrow} \rangle = 0$ を使った．他方，縮約された密度行列，式 (8.42) からは，B の期待値の予測は

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{\rho_{\mathrm{red}}} &= \mathrm{tr}\,(\widehat{\rho}_{\mathrm{red}} \widehat{B}) = |\alpha|^2 \,\mathrm{tr}\,(| \uparrow \rangle \langle \uparrow | \widehat{B}) + |\beta|^2 \,\mathrm{tr}\,(| \downarrow \rangle \langle \uparrow | \widehat{B}) \\ &= |\alpha|^2 \, \langle \uparrow | \widehat{B} | \uparrow \rangle + |\beta|^2 \, \langle \downarrow | \widehat{B} | \downarrow \rangle \end{aligned} \tag{8.44}$$

である．これは式 (8.43) と同じものである．

この結果は，2 つの状態は (実用論または道具論に対する類似した議論をしたように) ある整合性を持っていることを示すが，しかしそれらが完全に同等であると言いきることは誤っている．もつれた状態と縮約された密度行列の確率的予測が等しいことは，単独の電子に対する物理量，つまり $\widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{B}$ の形の特別な作用素，についてだけ言えることである．電子と装置を両方とも含んでいる物理量は，これら 2 つの状態の違いを明らかにする．従って，装置の自由度の**縮約**によって有効的に得られる混合状態，式 (8.43) には，電子スピンに付与されているが知られていない値を用いた単純な解釈が**与えられない**．この理由で，このタイプの混合状態は，しばしば「不完全な」混合と呼ばれている．従って，厳密な道具論の見解が不十分であると感じるならば，もつれた状態と縮約された密度行列を互いに整合的にする問題は残る．特に，量子状態を個々の系と結びつける解釈の体系を望むなら，まさにそうである．

この状況への可能なアプローチは次の通りである．

1. 標準量子論の数学形式はいつも適用できるわけではない．状態ベクトルと自己共役作用素を使うのは正しい．しかし,「現実の」理論では容認できない状態は決して起こらないような非線形時間発展を含む．特に，もつれた状態は巨視的な系または我々の直感に反するような状況においては決して起こらない．これは，現実の測定装置と (死んでいても生きていても) 猫を含む．そのような系においてマクロ的性質の固有状態の線形結合は決して起こらない．
2. 標準量子論の数学形式は普遍的に適用でき，式 (8.40) のようなもつれた状態は起こる．しかし実際上は，これらは**あたかも**状態収縮が起こったことと解釈される．
3. 現在の量子論は全く基本的な理論ではない．それはせいぜいある種類の系に対して，外部からある種の操作を行った結果を予測するための，道具論のための道具である．しかし，それはここで議論している閉じた系を含む問題に対処することができない．根本的に何かが新たに必要である．ただ時間発展方程式を非線形であるものに変えることではなくて，もっと大きな変革が必要である．

最初のアプローチでは本質的に特別な相互作用の存在を仮定し，標準量子論を使っては記述できない．そして，新しい拡張されたある理論の動力学過程の結果として，状態ベクトルのもつれ状態が実際に解消される．つまり，個々の系に関して，この特別な相互作用が潜在性—もつれた状態ベクトル，式 (8.40) によって記述される－から，結果が明白な**実在**への変化を作り出す．ここで，この還元過程が決定論的でなければならない論理的理由は無いことに注意しよう．新しい「動力学過程」はある種の確率過程でありえるし，その場合には最終状態は我々が考えていたタイプの密度行列である．

非線形性の起源やそれがあらわになるスケールについては意見が非常に異なるけれども，そのような機構について多くの具体的な提案がなされた．よりもっともらしい提案は次の通りである．

- 巨視的であるかほぼ巨視的なサイズの「大きい」系に適用されたとき，量子論は非線形になる (例:実験装置の一部，大学副総長または猫)．ブラウン運動のようなある確率過程を仮定し，それが収縮を促すというくつかの理論が提案された．興味ある比較的最近の例は，Ghirardi, Rimini & Weber (1986) や Pearle (1986) の仕事である．

- 一般相対性理論で記述される重力が，非線形性を生み出す．ここでも，時間発展が非線形である程度を決定するのに，系の大きさが重要な要因であることが示唆される．このタイプの 1 つの考えは Penrose (1989) の魅力的な本で議論されている．Penrose の考えは，伝統的な理論をずっと適用していくと，重力の量子論により時空幾何の固有状態の重合せ状態を作り出す点で，量子論が壊れるというものである．

- 測定結果が人間の精神に達するまでは，標準量子論に基づく測定過程は機能する．しかし，精神に達した時点でこの理論は破綻する．人間の精神が究極の測定装置であるというこの驚くべき提案を最初にしたのはフォン・ノイマンであった．つまり 測定過程の相互作用の結果が人間の意識に達するとき，潜在性から現実への最終的な変化が起こる．しかし彼は，精神の機能には理論物理学の手が本質的に届かないと考えた．もちろんそのような立場は,「意識」の意味，精神実体二元性の問題，などについての多くの非常に難しい問題に全く答えられない．

  Wigner (1961) は異なる見方をしている．彼によれば原則として精神の機能は物理学的に記述**できる**．しかしこれには，人間の精神がそれ自体を，量子状態の重合せで記述できないことを保障する量子論の**非線形版**が必要になる．おそらく，猫 (少なくとも，生きている猫) の精神もまた十分にこの範疇であろう．

  Wigner はこの問題に関して後に考えを変えてしまったが，彼の一般的な視点はいろいろな形で，長年にわたって支持されてきた．実

> 際に，それは量子論の「標準」解釈とさえ言われた．意識を持ち出す議論の最近の文献には，Stapp (1993)，Lockwood (1992) がある (後者は主に多世界解釈の視点で書かれている．下記参照)．

意識を基本的なものとして引き合いに出すことは，物理学の通常の範囲を越えて深遠な問題を持ち込むので，測定問題には他の解決を探したほうがよいだろう．それだけでなく，意識の役割がどのように有効に適用されるか見ることは非常に難しい場合がある．その明白な例は量子宇宙論である．そこでは,「潜在を実在化させる」「普遍的な意識」の存在を引き合いに出すことなく，全宇宙の量子状態について議論することが要求される．

測定問題の他の解決法を見つけるという方向は，近年第2のアプローチを生んでいる．つまり量子論の現在の技術的な定式化 (式 (8.40) を含む) を正しいと認め，状態収縮の描像は，近似的なものであるとみるのである．特に，たとえ全ての時間発展が線形のシュレーディンガー方程式によって記述されるとしても，系の環境への結合が，系の状態ベクトルの明瞭な収縮につながると主張するのである．この過程は特に巨視的な系において効果的である．そして，巨視的な観測量の固有状態の線形結合は実際には決して起こらないのである．より正確に言えば，たとえ線形結合があっても非常に速く干渉は消滅するのである．

多くの点で，この提案は非常に有望に見える．有効な収縮が，**デコヒーレンス**の過程によって起こるのである．これには，(式 (8.43–8.44) の文脈ではじめに言及した) 一対の系のベクトル状態が，一方の自由度を「縮約」することによって混合状態になるという数学的操作を利用する．この縮約は，複雑な部分系の詳細配位について我々が無知であることの表現である．大きい系が持つ典型的な観測量の固有値の密集という性質は特別な重要性をもっていて，これにより環境系とのほとんどどんな結合に対しても重要な変化を作り出す．要するに,「孤立系」の概念 (それは量子論を定式化するときに用いられるが) は理想化である．唯一の確かな孤立した系は宇宙である．

多くの研究が，この類の収縮が巨視的な系においては非常に速く起こることを示した．3^oK の宇宙背景放射との相互作用でさえ，10^{-23} 秒 (Joos

& Zeh 1985)! でデコヒーレンスを作り出すのに十分である．しかし，もつれた状態の問題のそのような解決は，式 (8.43–8.44) の文脈において言及したのと同じ批判の対象となる．つまり，このように作られた密度行列は，巨視的な系に付随する特性の**純粋な**無知度の解釈にならないからである．

この批判は，通常の物理学においては回避されるかもしれないが，合成系に関する**全ての**情報を（実際には難しいことであるが）考えようとした場合，この批判は確かに当てはまる．唯一の許容できる立場は，**原理的に**系と環境間の失われた相関が決して回復されないとするものだろう．例えば，一般相対性理論に基づく特定の種類の宇宙論に特有の性質が考えられるかもしれない．

確かに，収縮問題の最も深刻な形は量子宇宙論において生じる．ここでは，背景時空を決める重力場や他の全ての物理的対象を含めて全世界の量子状態を記述しなければならない．もちろん，この状況において環境は全く存在しない．実のところ我々は，問題の核心つまり「潜在性」から「現実」への変化が実際にどう起こるかの理解に成功していないのである．

8.5.4 多世界

測定問題において，劇的な試みは，**全ての**時間変化が線形シュレーディンガー発展によって起こると主張する**多世界**解釈である．そこでは客観的な意味での状態ベクトルの収縮は起こらない．そして方程式 (8.40) はそのまま正しい．加えて，全ての物理系は，観測の相互作用を含めて量子力学で記述される．従って,「測定」はこの理論では何ら別枠の役割を演じない．特に，量子論を解釈するために**先験的**なものとして導入される古典対応領域が不要である．その代わりに，測定と古典物理学は，量子力学の枠組みからある方法によって「作らなければならない」．

量子論へのこのアプローチは，Everett (1957) による重要な論文にさかのぼり，近年ますます支持されるようになった．特に，測定過程を別枠で用意するのが不要であるとみなしたがる量子宇宙論の分野で支持が多

い[13]．実際，量子宇宙論の**どんな**解釈においてもこの多世界解釈はついて回る．従って「エヴェレット」体系は，初期宇宙の物理を研究するためにほとんど義務的と言える程である．

多世界解釈の主な特徴は，式 (8.41) のようなもつれた状態に与えられる意味である．具体的には，式 (8.41) の両項が実際に存在するものを記述すると主張する．状態は，外からの測定が合成系の上になされたときに得られる結果の確率をただ意味するだけではない．しかし，人によって『実際に存在する』ということの解釈は異なる．もつれた状態のそれぞれの項は，宇宙がそれぞれの異なる世界に**分岐していく**ことを表すという考えを進展させたディウィット (DeWitt & Graham 1973) はよく知られている．例えば式 (8.41) を考えると，測定相互作用の間に 2 つの世界に分岐するという描像である．つまり，一方ではスピンアップが，他方ではスピンダウンが観測される．

他方エヴェレット自身は，他の物的世界のいろいろな側面と相関している，観測者の主観的な状態の役割を強調した．つまりこの理論は，多くの「世界」というよりむしろ多くの「視点」を扱う．この方向の最近の発展として，いわゆる量子論の「多意識」解釈 (例えば Lockwood (1992)) がある．

そのような考えに対する自然な疑問は，連続的にこれらの異なる宇宙に分岐していると我々がなぜ感じないか，ということである．あるいは，多視点解釈において我々はなぜ 1 つの視点を経験するだけなのかということである．多世界解釈の支持者がこの問題に答える際に，結合系の集合に適用されたときの量子論の内部整合性を指摘するだろう．— この整合性に関しては，合成系の状態が式 (8.41) のもつれたベクトルであるとき，第三の装置を用いて系と装置を測るというところで既にコメントした．特に，我々(またはコンピュータ) が情報を格納する過程をモデル化するところの**記憶**状態がしばしば議論される．ここでの主張は，状態ベクトルのすべて

[13] 奇遇にも,「多世界」という概念は，チャールズ・ウィリアムズ (1968) による 1931 年初版の小説において予期されたようである．チャールズ・ウィリアムズ (その人は J.R.R. Tolkein と C.S. Lewis の親友であった) は，見慣れない感動的ないくつかの本を書いた．霊知に触れたい読者には一読を薦める．

の分岐において，我々の記憶状態と「起こった」他の事象の間に 100%相関があるので，分裂していると感じないということである[14].

重要なのは系のいろいろな特性の間の**相関**である．例えば状態ベクトル，式 (8.41) の意味は，もし電子のスピンがアップならその時必然的に装置は状態 $|A_{\uparrow}\rangle$ であり，スピンがダウンのときも同様である，ということである．もちろん，この予測は伝統的な量子論でもなされるが，そこでは，装置＋電子系の測定の結果に関する**条件付き**確率が問題になる．新しい描像が「多くの」世界を伴う (あるいは,「分岐」する世界) と言われる正確な意味は，電子がスピンアップを「持つ」と言うときの「持つ」という語に与えられる正確な意味に依存する．

多世界解釈の技術的なかなめは，**相対的な**状態についての考えである．つまり 2 系の合成系の状態が

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij}\,|\chi_i\rangle\,|\phi_j\rangle \tag{8.45}$$

であるとき，$\sum_{j=1}^{N_2}\psi_{ij}\,|\phi_j\rangle$ は，系 1 の状態 $|\chi_i\rangle$ に**相対的な**系 2 の状態であると言う．式 (8.41) の例では，装置の状態 $|A_{\uparrow}\rangle$ 又は $|A_{\downarrow}\rangle$ に相対的な電子の状態は，それぞれ $|\uparrow\rangle$ 又は $|\downarrow\rangle$ である．一般に，添字 $i = 1, 2, \ldots, N_1$ は，系 1 の状態 $|\chi_i\rangle(i = 1, 2 \ldots, N_1)$ に関して定義され，異なる分岐をラベルする．

しかし問題は，分解，式 (8.45) が一意的でないということである．全体の角運動量が零である一対の電子による単純な例 (アインシュタイン・ポドルフスキー・ローゼンのパラドックスとして後でも議論する) を挙げよう．スピン部分の状態は

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\big) \tag{8.46}$$

と書ける．ここで $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ は粒子 1 と 2 が，z 軸に沿ってのスピン $+\frac{1}{2}\hbar$ と $-\frac{1}{2}\hbar$ をそれぞれ持つ状態で，$|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ はその逆である．状態，式 (8.46) の

[14] エヴェレットのアプローチは,「観測者」の特性と状態について暗黙のいくつかの仮定を含む．特に記憶について，これと関連した問題の明快な議論については Bohm & Hiley (1993) を参照.

もつれた性質は，フェルミオンのパウリ排他原理を反映する．多世界解釈の観点から，そのような状態の生成は，2 つの分岐に「分裂する」ことを意味する．1 つの分岐では，最初の粒子は $S_z = \frac{1}{2}\hbar$ を持ち，第二の粒子は $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ を持つ．そしてもうひとつの分岐では，これらのスピンの割当てが逆である．

さてもし，スピンの x 成分に着目したらどうだろう？スピン作用素は，

$$\widehat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.47}$$

である．そして，$\widehat{S}_z$ の固有ベクトルは

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.48}$$

である．$\widehat{S}_x$ の固有ベクトルは

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8.49}$$

である．ここで $|\rightarrow\rangle$ と $|\leftarrow\rangle$ はそれぞれ固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ と $-\frac{1}{2}\hbar$ に対応する．式 (8.48–8.49) から式 (8.46) の状態 $|\psi\rangle$ は，$\widehat{S}_x$ の固有ベクトルを用いて

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle - |\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle\big) \tag{8.50}$$

とも書かれる．

式 (8.50) を多世界解釈すると，観測量 S_x に相関を持って分岐することを意味する．他方，表式 (8.46) によると，S_z に相関を持って分岐する．もしどちらかが正しいとすれば，どちらが正しいのだろうか？式 (8.46) と式 (8.50) の右辺は互いに等しいことは確かだが，個々の項は異なるので，どちらもが正しいとはとても言えない．積ベクトル $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ は積ベクトル $|\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle$ または $|\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle$ のどちらとも**異なる**．

要するに，分岐にはヒルベルト空間のある特別な基底系が必要で，それに関して分岐が起こる．そしてそのような特別な基底を特定する試みがな

されている．例えば，観測装置の指針のような巨視的な系の位置の固有ベクトルなどである．そのような特別な基底の使用は，前述のデコヒーレンスの議論から，実際に正当化されるかもしれない．つまり，指針が環境とのデコヒーレンスの結果として瞬時に位置のある値を得る，ということはもっともらしい．宇宙論的考察に訴える他の試みもある．物理的に選択されるある特別な座標系があって，これによって特別な時間が選ばれる．分岐がある特定の時刻に対して起こるため，分岐理論にはいつも「時間」の問題がついてまわる．量子宇宙論においても，悪名高い「時間の問題」がある．量子重力への一般相対論の自然なアプローチにおいては，時間が完全に消えるのである．(例えば，Isham (1994))．

さらに基本的なレベルでの状況は不明である．おそらく，異なる分岐に「分裂していく」宇宙に関して，文字通り量子論の多世界解釈を適用することは非常に誤解をまねくだろう．残念なことに未だ結論は出ず，意味のある理論を構成する問題は継続的に議論されている．このため多くの関心が，時間に依存するシュレーディンガー方程式はいつも成立するという修正版のエバレット的な量子論へのアプローチに向けられている．それは外的要因による状態収縮は無いが，やはり標準的な量子論と重要な点で異なる方法である．

この種の最も面白い考えは，**整合的な履歴**解釈である．それは，固定された時刻の観測量でなく，どんな時に系の**履歴**に対して確率を付与する意味があるかを記述する数学的形式に基づいている．この体系の基本的哲学はおそらく「多世界解釈」にある．しかしもとの考えより技術的に洗練されている．特に「分岐する」という扱いにくい考えは，より首尾一貫した数学的に正確な描像に置き換えられている．

現在，この興味をそそるアプローチは，量子宇宙論で時間を議論する新しい可能性を提供すること以上に多くの関心をよんでいる．しかし，その解説は本書の範囲を越える．興味を持つ読者は，Omnès (1994)(この理論

の創始者の一人) の最近の仕事を参照しよう[15].

8.5.5 隠れた変数？

先に述べた諸理論はまぎれもなく異様で，議論を呼び，今でも熱い論争の対象である．従って長年にわたって，標準量子論の枠組みが不完全であるという考えや，確率的性格が特定の「隠れた変数」の存在に起因するという考えさえあったのも無理はない．

隠れた変数理論には異なるいくつかの種類があるが，共通の特徴がある．つまり，任意の量子状態 $\vec{\psi}$ に対して，あらゆる観測量 A は，ある空間 Λ に属している一組の隠れた変数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ の値と $\vec{\psi}$ によって決定される，客観的にはっきりした値 $A(\vec{\psi}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ を**持つ**というものである．さらにある確率密度 $\mu_{\vec{\psi}}$ が Λ に存在すると仮定して，状態 $\vec{\psi}$ での A の期待値が

$$\langle A \rangle_{\vec{\psi}} = \int_\Lambda d^n\lambda \; \mu_{\vec{\psi}}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \, A(\vec{\psi}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{8.51}$$

で与えられるとする．問題は，空間 Λ，確率密度 $\mu_{\vec{\psi}}$ と値関数 $A(\vec{\psi}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ をうまく見つけて，標準的量子論の予測を再現するようにすることである．

概念上の問題の多くは，上に述べた隠れた変数が存在するならば改善される．例えば，式 (8.3) のタイプの客観的な収縮は，隠れた変数の全く決定論的な，しかし非線形な，力学によって起こるかもしれない．一般に隠れた変数の理論は，古典物理学の実在論と類似した哲学の上に成り立っている．しかし隠れた変数の理論は，独自の問題をはらみ，伝統的な理論に劣らず奇妙な物理学的現実の描像に至るのである．これは魅惑的な話題であり，全ての物理量に現実に**所有される**値を割り当てるという試みが実際どのように失敗するかという，いままで延ばしてきた議論に自然に行き着く．特にここで，Kochen・Specker の定理，量子論理，アインシュタイ

[15] 広範なレビューは (Omnès 1992) を参照.

ン・ポドルフスキー・ローゼンのパラドックス，有名なベル不等式を議論しなければならない．

第9章　量子物理学の特性

9.1　Kochen・Speckerの定理

おそらく多くの量子論ユーザーは，実用論的アプローチ（あるいはさらに完全な道具論的解釈）に満足しているかもしれない．しかしそれが物理的真実の究極の見方を与えるとは思えない．実際に，個々の系の特性に客観的状態を与えないままでいることが，本当に現実の描像を与えるかどうかは疑わしい．しかし「潜在的な」特性を個々の系に付与することによって実在論の哲学へと進む試みは，新しい概念の開拓を刺激はするが，あまりに漠然としている傾向がある．特に，潜在性から現実性への移行は未解決の問題であり，これは量子論のすべての分野，および個々の系が全世界である量子宇宙論の場合に重要な問題である．

従って，多くの物理学者が，確率論的記述に難しい哲学の問題が起こらない古典的な統計物理学と同じように，量子論の解釈を追求したことは驚くに値しない．この種類の大部分の議論は，確率の認識論的解釈を伴う．その確率は，客観的な存在状況についての我々の**知識**に対して付与される．例えば $\triangle_\psi A$ の表現は，確定値を持つと想定される A に対する我々の無知の測度である．そのような立場は完全に実在論の見解に整合的である．そして，個々の物と特性は観察または測定のどんな行為からも独立して明確に存在している．この種類の解釈は，自然に以下の仮定をしている．(i) ただ繰り返し測定の結果だけでなく，またアンサンブルに対してだけでなく，量子状態は直接に個々の系に結びついている．そして，(ii) 物理量の (完全な) 測定は，測定直前に系に付随していた数値を表示する．

特性が系に付随するとする理論体系においては，これまで議論された大

部分の問題は起こらない．例えば，状態ベクトルの収縮は，測定することによって系についての更なる知識を獲得することを単に反映するだけである．これは条件付確率についての古典的な考えかたにまさに対応する．確かにこれは，測定過程が量子力学で記述できるかどうかの問題をもう一度提起するが，古典統計物理学における同じ問題の重要性を超えるものでは無い．

量子論の確率認識の解釈によって大部分の概念上の問題を解消しそうであるので，読者は理論がなぜ初めからこのように示されないかについて疑問に思うかもしれない．その理由は，全ての物理量が値を「所有している」という概念が，量子論の実際の理論形式となかなか相容れないからである．2つの主な難題は，Kochen・Specker の定理と有名なベル不等式である．

最初に Kochen・Specker の定理を議論しよう．これは，一般に考えられている**値関数** $V_{\vec{\psi}}(A)$ の存在に関係している．この値関数は個々の系の量子状態が $\vec{\psi}$ である時の，物理量 A の数値であると解釈される．こう考えて古典物理学においては困難は無い．つまり，4.2 節で見たように，各々の物理量 A に関数 $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$($\mathcal{S}$ は古典的な状態空間) が対応して，状態 $s \in \mathcal{S}$ での A の数値は，s の f_A による数値である:

$$V_s(A) = f_A(s). \tag{9.1}$$

任意の特定のペア $(A, \vec{\psi})$ に対して $V_{\vec{\psi}}(A)$ の数値を指定する**明白な**方法が無いので，量子物理学における状況は非常に異なる．$\vec{\psi}$ が A を表現する自己共役作用素 $\widehat{A}$ の固有ベクトル $\vec{u}_a$ ならば，$V_{\vec{u}_a}(A) = a$(a は対応する固有値) だと思うかもしれない．しかしこれは，この場合しか適用できないので，一般の状態でどうかがわからない．結果として，更なる特性を仮定することなく量子値関数の存在について有用なことは何も言えない[1]．

[1] 上のように，固有ベクトルなら値が確定するという条件を満たす多くの関数がある．例えば関数 $V_{\vec{\psi}}(A) := \langle\vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\psi}\rangle$($\vec{\psi}$ は規格化されている)．しかしこれは A の**期待される**数値そのものを与えるので，一般に分散 $\Delta_{\vec{\psi}}(A)$ が有限であり，値関数としては良い選択ではない．従って有用な値関数を得るためには，それは固有ベクトル以外に一般化されなければならない．

そのような最も自然な条件は，任意の関数 $\mathcal{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して

$$V_{\vec{\psi}}(\mathcal{F}(A))=\mathcal{F}\big(V_{\vec{\psi}}(A)\big) \tag{9.2}$$

である．つまり，任意の量子状態 $\vec{\psi}$ に対して，物理量の関数の値は，物理量の値に対する関数値と等しい．例えば L_x^2 に対する数値は，角運動量 L_x の数値の二乗となる．

ここで，表現 $\mathcal{F}(A)$ の意味について，5.2節での議論を思い出そう．状態空間 $\mathcal{S}$ の与えられた古典系を「量子化」する時，$\mathcal{F}(A)$ は $\mathcal{F}(f_A)$ と表すことができた．ここで $f_A:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$，又式 (5.20) のように，写像 $\mathcal{F}(f_A):\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ は任意の $s\in\mathcal{S}$ に対して $\mathcal{F}(f_A)(s):=\mathcal{F}(f_A(s))$ によって定義される．この場合，値関数 $V_{\vec{\psi}}$ は，古典的な状態空間 $\mathcal{S}$ の上の実数値関数 f で定義されるとみなせる．

しかし，そのような古典的背景を仮定したくないならば，異なる何かが必要である．1つの可能性は，作用素 $\mathcal{F}(\widehat{A})$ に付随する物理量として $\mathcal{F}(A)$ を定義することである．もちろん，これに意味があるのは，物理量から自己共役作用素への量子化写像が以下の条件を満たす場合だけである：(i)「上への」写像—これは $\mathcal{F}(\widehat{A})$ が**ある**物理量の量子表現であることを言う，そして，(ii) 1対1写像—これは定義される量が**一意である**ことを言う．これらの条件の下で一般に，$V_{\vec{\psi}}$ を物理量でなく，自己共役作用素の関数とみなせる[2]．

そのような方法をとろうとする理由は，一方では，(実用論のアプローチと違って) **測定**を援用する操作論的な定義は，実在論的解釈において適切でないし，しかし他方では，任意の $\vec{\psi}\in\mathcal{H}$ に対して式 (9.2) を満たす物理量であるとして $\mathcal{F}(A)$ を**定義する**と，式 (9.2) がトートロジーになってしまうので避けたいからである．陥りやすい点は，式 (5.20) で示され

[2] あるいは，まず $V'_{\vec{\psi}}$ を物理量ではなく値関数 (すなわち**自己共役作用素の関数**) と規定して議論を始めてもよい．条件式 (9.2) に対応するのは関係 $V'_{\vec{\psi}}(\mathcal{F}(\widehat{A}))=\mathcal{F}(V'_{\vec{\psi}}(\widehat{A}))$ であり，これは数学的な実在だけを扱う．物理量の値関数 $V_{\vec{\psi}}$ は，$V_{\vec{\psi}}(A):=V'_{\vec{\psi}}(\widehat{A})$ によって定義される．量子化写像が上への1対1対応であるならば，$\mathcal{F}(\widehat{A})$ の逆像として $\mathcal{F}(A)$ が明確に定義され，このように造られる $V_{\vec{\psi}}$ 関数は，式 (9.2) を満たす．

たように，これがまさに，物理量の関数が古典物理学で**定義された**方法であるということである．この議論は，基本的な関数形保存の必要条件 $\widehat{\mathcal{F}(A)} = \mathcal{F}(\widehat{A})$ にまた突き当たる．そしてそれは $\mathcal{F}(A)$ が作用素 $\mathcal{F}(\widehat{A})$ に付随する物理量であると定義すればトートロジーになってしまう．

直観的にもっともらしい必要条件式 (9.2) は以下のことを帰結する．

1. $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ ならば値関数は加法的である．任意の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$V_{\vec{\psi}}(A+B) = V_{\vec{\psi}}(A) + V_{\vec{\psi}}(B) \tag{9.3}$$

ここで，$A+B$ は自己共役作用素 $\widehat{A}+\widehat{B}$ に対応する物理量である．この証明は以下のようになる．6.3 節から，$[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ は，ある関数 $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $\widehat{A} = \mathcal{F}(\widehat{C})$ および $\widehat{B} = \mathcal{G}(\widehat{C})$ となるような自己共役作用素 $\widehat{C}$ の存在を意味することを思い出そう．従って $\widehat{A}+\widehat{B} = (\mathcal{F}+\mathcal{G})(\widehat{C})$ であり，条件式 (9.2) から

$$\begin{aligned} V_{\vec{\psi}}(A+B) &= V_{\vec{\psi}}\big((\mathcal{F}+\mathcal{G})(C)\big) = \big(\mathcal{F}+\mathcal{G}\big)\big(V_{\vec{\psi}}(C)\big) \\ &= \mathcal{F}(V_{\vec{\psi}}(C)) + \mathcal{G}(V_{\vec{\psi}}(C)) = V_{\vec{\psi}}(\mathcal{F}(C)) + V_{\vec{\psi}}(\mathcal{G}(C)) \\ &= V_{\vec{\psi}}(A) + V_{\vec{\psi}}(B), \end{aligned} \tag{9.4}$$

となり，証明された．

2. 同じように，値関数は乗法の特性を持つ．もし $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ であれば，任意の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$V_{\vec{\psi}}(AB) = V_{\vec{\psi}}(A)V_{\vec{\psi}}(B) \tag{9.5}$$

である．ここで AB は自己共役作用素 $\widehat{A}\widehat{B}$ に対応する物理量である．

3. $\mathbb{1}$ を単位作用素 $\widehat{\mathbb{1}}$ に対応する物理量とする．すると，$A := \mathbb{1}$ として式 (9.5) を使って，各々の状態 $\vec{\psi}$ 及び全ての物理量 B に対して $V_{\vec{\psi}}(B) = V_{\vec{\psi}}(\mathbb{1})V_{\vec{\psi}}(B)$ となる．従って少なくとも 1 つの量 B があって $V_{\vec{\psi}}(B) \neq 0$ となりさえすれば，各々の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$V_{\vec{\psi}}(\mathbb{1}) = 1 \tag{9.6}$$

を得る．

射影作用素 $\widehat{P}$ で表現される物理量 P にとって，乗法の特性の式 (9.5) は，重要な意味を持つ．すなわち，特性 $\widehat{P}^2 = \widehat{P}$ から，直ちに $(V_{\vec{\psi}}(P))^2 = V_{\vec{\psi}}(P^2) = V_{\vec{\psi}}(P)$ となり，従って

$$V_{\vec{\psi}}(P) = 0 \text{ 又は } 1 \tag{9.7}$$

となる．従って P を**命題**と考えると，量子値関数 $V_{\vec{\psi}}$ は状態 $\vec{\psi}$ に対して，「真」または「偽」という結果を返す．このことは，9.2 節の量子論理の議論において再考しよう．

さて，恒等変換の分割をなす射影作用素の全体 $\{\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \ldots, \widehat{P}_n\}$ を考えよう．つまり $i \neq j$ なら $\widehat{P}_i\widehat{P}_j = 0$ であり

$$\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 + \cdots + \widehat{P}_n = \widehat{\mathbb{1}} \tag{9.8}$$

である．例えば，離散的な固有値を持つ自己共役作用素 $\widehat{A}$ のスペクトル射影作用素 $\widehat{P}_i = \widehat{P}_{A=a_i}$ がこの例である．実在論的解釈によると，命題 P_i とは，A が特定の数値 a_i を**持つ**という主張である．すなわち，命題 $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ の全体が相互に**排他的**であり—与えられた時刻に 1 つだけが真である—，そして**網羅的**である—与えられた時刻に少なくとも 1 つは真でなければならない．これは，真と偽の性質の常識的な見方と調和する．つまり相互に排他的・網羅的な命題の組の中で，1 つのみが真で他は偽である．この性質は理論形式から導かれる．実際に，式 (9.3) と式 (9.6) は，任意の状態 $\vec{\psi}$ に対して $\sum_{i=1}^{n} V_{\vec{\psi}}(P_i) = 1$ を意味する．しかし $V_{\vec{\psi}}(P_i)$ は数値 0 または 1 を持つので，この総計は，1 つの命題だけが数値 1 を与え残りは数値 0 を与える場合のみ，1 になる．

この特別な例は，$\{\,|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots\,\}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底としたときの $\widehat{P}_i := |e_i\rangle\langle e_i|$ である．今得られた結果によれば，任意の状態 $\vec{\psi}$ に対して値関数 $V_{\vec{\psi}}$ は，数値 1 を 1 つの射影作用素/一次元の部分空間 (より正確にいえば対応する命題) に，そして数値 0 をそのほか全部に，割り当てなければならない．これは自明な条件ではない．実際与えられた任意のベクトルは，多くの異なる正規直交基底に属しているが，対応する一次元の部分空間に与えられる数値は，そのような基底の選択から独

立していなければならないというのである．実際これは非常に強い条件であり，満足されることは無い．

定理 (Kochen・Specker)

$\dim(\mathcal{H}) > 2$ であるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して，そのような関数 $V_{\vec{\psi}}$ は存在しない．

証明

この定理の巧妙な証明は，多くの教科書にある．オリジナルの文献は Kochen & Specker (1967) である．定理とその意味に対する最近の良い議論は Redhead (1989)，Hughes (1989)，Peres (1993) である．

値関数が特定の次元 N のヒルベルト空間に対して存在するならば，N より小さい次元の任意の空間に対してそうであることを直接実証するのが証明の最初のステップである．同じように，値関数が複素ヒルベルト空間に対して存在するならば，同じ次元の任意の実ヒルベルト空間にも存在する．従って，定理を証明するために，そのような関数が実三次元ユークリッド空間で存在しないことを示せば十分である．

このように問題を凝縮していくと，明白に幾何学的に，特に地図の色塗り問題のような方法で議論できるという利点を持つ．Kochen と Specker は最初の証明で，一貫して数 0 または 1 を望むようには割り当てられないベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 117 個のベクトルの組という形で，値関数の存在に対する反例を見つけた．最近，ペレスは同様の反例を 33 個のベクトル (これらは $\mathbb{R}^3$ の直交ベクトルの 11 個の三つ組から成り立つ) についてすっきり構成した．詳細は，Peres (1991) と Peres (1993) を参照．　**証明終り**

この著しい結果は，定理が暗黙のうちに仮定しているすべての条件を満たしては，値関数 $V_{\vec{\psi}}$ が存在できないことを示す．その条件のうちすぐわかるものは以下の通りである

1. 条件式 (9.2) つまり $V_{\vec{\psi}}(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}\big(V_{\vec{\psi}}(A)\big)$,
2. 量子化写像 $A \mapsto \widehat{A}$ が 1 対 1 であるという仮定.

最初の条件がおそらく満たされない自然な状況は，一対の自己共役作用素 $\widehat{A}_1$ と $\widehat{A}_2$ で $[\widehat{A}_1, \widehat{A}_2] \neq 0$ を満たすものがあって，自己共役作用素 $\widehat{A}$

が，関数 $\widehat{A} = f_1(\widehat{A}_1)$ および $\widehat{A} = f_2(\widehat{A}_2)$ と書ける場合である．条件式 (9.2) は

$$f_1(V_{\vec{\psi}}(A_1)) = f_2(V_{\vec{\psi}}(A_2)) \tag{9.9}$$

を意味し，$\widehat{A}_1$ と $\widehat{A}_2$ が交換しないならば，この仮定は疑われる．例えば，適切な測定をすることによって物理量が持っている数値を見出せると想定すると (これは不適当ではないにせよ**仮定**である) 式 (9.9) は，A_1 を測定し f_1 を作用するのと，A_2 を測定し f_2 を作用するのとの結果が同じであることを意味する．しかし，$[\widehat{A}_1, \widehat{A}_2] \neq 0$ ならばそうはできない．

他方，条件式 (9.9) が破れているとすると不都合を導く．例えば，$\widehat{A}_1$ と $\widehat{A}_2$ を非可換な自己共役作用素で，それらのスペクトル分解は共通の射影作用素 $\widehat{P}$ を含むとしよう．すると $\widehat{P}$ は，$\widehat{A}_1$ の関数としても又 $\widehat{A}_2$ の異なる関数としても書けることになる[3]．従って，条件式 (9.2) の (従って，式 (9.9) の) 破れは，物理量 P に付随する数値 (同等であるが，関連する命題の真または偽) が $\widehat{P}$ をどう書くかに依存することを意味する．つまり $\widehat{A}_1$ のスペクトル表現に従えばある数値であるが，$\widehat{A}_2$ のそれに従えば他の数値となる．

換言すれば，P の数値は，**他の**物理量が同時にどんな値を割り当てられるかに拠る，ということができる．つまり それは，$\widehat{P}$ と交換する作用素のどれを採用するかに依存する．例えば $\widehat{P}$ が $\widehat{A}_1$ のスペクトル表現に属しているとみれば，スペクトル集合の残りの射影作用素は，交換するパートナーとして自然に選択できる．そして $\widehat{P}$ が $\widehat{A}_2$ のスペクトル表現に属しているとみる場合も同様である．より一般に，これは表現作用素 $\widehat{A}$ が縮退した固有値を持つ任意の物理量 A の数値が，**文脈**に依存するかもしれないことを意味する．特に，それは対応する作用素が $\widehat{A}$ と交換し，従って $\widehat{A}$ の退化部分空間のベクトルにラベルをつける，他の物理量の選択に依存するかもしれない．

---

[3] 一般に，自己共役作用素 $\widehat{A}$ がスペクトル分解 $\widehat{A} = \sum_{i=1}^{M} a_i \widehat{P}_i$ で離散スペクトルを持つならば，射影作用素 $\widehat{P}_i$ は，$\widehat{A}$ の関数として $\widehat{P}_i = \chi_{a_i}(\widehat{A})$ と書ける．ここで $t = r$ なら $\chi_r(t) := 1$ でそれ以外は 0 になる．関数 χ は，この文脈で以前式 (5.31) に現れた．

さらに表現を変えると，作用素 $\widehat{A}$ が**一意的には**物理量を表現しないということである．つまり他の交換する量の選び方によって，それは異なる意味を持つと考えられる．これは，値関数を救う第二の可能性と関係する．つまり量子化写像 $A \mapsto \widehat{A}$ が多対 1 であると考えるのである．

Kochen・Specker の定理は，個々の系がその観測量の数値を所有すると考えなければ，量子論への実用論のアプローチに直接重要ではない．しかし，(i) 物理量は任意の個々の系に対して数値を持ち，(ii) これらの数値は適当な測定によって測定できると仮定するなら，この定理は重要で，得られる結果が観測量の選択に依存することを示す．特に，$\widehat{A}$，$\widehat{B}$，$\widehat{C}$ が，$[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0 = [\widehat{A}, \widehat{C}]$ だが $[\widehat{B}, \widehat{C}] \neq 0$ を満たす作用素ならば，A の**個々の**測定の結果は，同時に B か C どちらを測るか (あるいはどちらも測らないか) に依存する．

後で考察するこの重要な例は，特殊相対性理論の意味で空間的に隔たった領域で，一対のもつれた状態の系を測定する「EPR」実験である[4]．A が第 1 の系に，B と C が第 2 の系に付随しているとき，B か C と同時に A を測定できるので，$[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0 = [\widehat{A}, \widehat{C}]$ である[5]．他方，第二の系と関連する作用素 $\widehat{B}$ と $\widehat{C}$ が $[\widehat{B}, \widehat{C}] \neq 0$ であるようにすることは簡単である．

一方，A の測定結果の**確率的**予測は，同時に測られる他のものに依存しない．状態が $|\psi\rangle$ である時に，結果 a_m を得る確率はいつも $\langle\psi| \widehat{P}_m |\psi\rangle$ である．加えて，個々の系の量が仮説として持っている数値の予測は，実験的にテストできない．結果として，文脈論に関係する上の推論は，実用論者を煩わせない．彼らは，特定の測定状況に依存して量子系の特性が意味を持つというボーアの考えを援用して，それを支持さえするかもしれない．

しかし，実在論的解釈の内でも，特性を「備えている」ということの意味が何かによって，数値の文脈上の割当てには，鮮明な相違がある．普通の

---

[4] 2 つの事象は，信号が光の速度を上回ることなく一方から他方へ送れないならば，**空間的**に隔たっている．事象のそのような任意のペアに，その 2 つの事象が同時である慣性座標系がいつもある．

[5] しかし，同時に測定できる二変数について考察した 6.3 節の議論を思い出そう．

会話における暗黙の了解は,『量 A は数値 a を持っている』と言うとき，同時に他の主張がなされてもそれに独立した事象としてそうであると理解されている．しかし，量子論の場合にはそうではなく，Kochen・Specker の定理によると，**ペア** (A, B) または (A, C) は，特定の数値 (a, b) と (a', c) を**ペアとして**持っていると言わなければならない．しかも文脈によっては，a が a' に等しくないかもしれないのである．

$\widehat{A}$ と交換する作用素 $\widehat{B}$ と $\widehat{C}$ が，大きい距離を隔てた測定と関係しているときは特別奇異である．B の測定直後の，遠く隔たった C の測定は，A に対して，ペア (A, B) の一部として考えられる数値から，ペア (A, C) の一部として考えられる数値へと，瞬間的な跳躍を「引き起こす」ように見える．これは，ベル不等式に関連して起こる非局所的効果である．

隠れた変数の理論における値関数は，量子状態 $\vec{\psi}$ での物理量 A の数値が，これら付加的な変数に依存するという仮定を伴う点に注意しよう．しかし，これは上の議論の本質を変えない．特に，隠れた変数の理論でも，特性を「所有する」ということは文脈に依存する．

9.2　量子命題の論理

9.2.1　「真」の意味

射影作用素 $\widehat{P}$ が命題 P を量子論的に表現するという考えに何度か言及した．そこでは，固有値 1 または 0 は，P が真であるか偽であるかをあらわす．(同等に，命題は $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{H}_{\widehat{P}} := \{\vec{\psi} \in \mathcal{H} \mid \widehat{P}\vec{\psi} = \vec{\psi}\}$ によって表現される)．さらに，式 (9.2) を満たす値関数 $V_{\vec{\psi}}$（存在するならば）は，各々の射影子に対して数 0 または 1 を対応させることを前節で明らかにした．その明白な解釈は，量子状態が $\vec{\psi}$ であるとき，$V_{\vec{\psi}}(P) = 1$ および $V_{\vec{\psi}}(P) = 0$ はそれぞれ，命題が真か偽であるかに対応する．

この型の 2 価関数 (**付値**として知られる) は古典的な命題論理学で重要な役割を演ずる．そしてこの視点，特に命題の「論理」が射影作用素によって表現されること，から更に量子論を探究することは有益かもしれな

い．最も重要なことは，おそらく各々の (正規化された) 状態 $|\psi\rangle$ が，確率の割当て

$$\mathrm{Prob}(P;\vec{\psi}) := \langle\vec{\psi},\widehat{P}\vec{\psi}\rangle = \langle\vec{\psi},\widehat{P}^2\vec{\psi}\rangle = \langle\widehat{P}\vec{\psi},\widehat{P}\vec{\psi}\rangle = \|\widehat{P}\vec{\psi}\|^2 \tag{9.10}$$

を与えるという事実である．そしてそれは，状態が $\vec{\psi}$ のとき，$\widehat{P}$ によって代表される状況が実現するという確率として解釈される．

物理学における全ての命題が，最終的には物理量の数値 (測定される，または所有される，などした) についての命題になるので，上の場合だけを考えて一般性は失われない．以降，$A \in \Delta$ の型の命題だけを議論しよう．つまり，物理量 A の数値がある部分集合 $\Delta \subset \mathbb{R}$ に属する (あるいは，適切な測定によって属することが判明する（以下参照）) という命題である[6]．この型の主張は，特定のある時刻における状況を問題にする．しかし必要に応じて，この理論形式は，$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ を満たす時刻 $t_1, t_2, t_3, \ldots$ に測定される (または所有される) 物理量 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ の組についての命題に一般化される．これは自然に**時間的**論理の量子論版に至るが，この拡張はここでは議論しない．

$A \in \Delta$ の型の命題は，通常，スペクトル射影作用素によって表現されると考えられる[7]．$\widehat{A}$ のスペクトルが離散的で，実数の部分集合 Δ に属している固有値を a_i と書くと，作用素 $\widehat{P}_{A\in\Delta}$ は射影作用素 $\widehat{P}_{A=a_i}$ の総和である．特別な場合として，ある固有値 a_j に対して $\Delta = \{a_j\}$ であるときは，$\widehat{P}_{A\in\Delta} = \widehat{P}_{A=a_j}$ である．量子論の確率予測は，状態が $\vec{\psi}$ のとき，$\mathrm{Prob}(A \in \Delta;\vec{\psi}) = \|\widehat{P}_{A\in\Delta}\vec{\psi}\|^2$ である．特に，$\widehat{P}_{A\in\Delta}\vec{\psi} = \vec{\psi}$ のときだけ $\mathrm{Prob}(A \in \Delta;\vec{\psi}) = 1$ である．これはつまり，固有値が Δ 内にある $\widehat{A}$ の全ての固有ベクトルによって生成する固有空間 $\mathcal{H}_{A\in\Delta}$ に $\vec{\psi}$ が属する場合である[8]．

与えられた射影作用素がこの型の複数の命題を代表するかもしれない点に注意しよう．例えば，2 つの作用素 $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ が共通のスペクトル射影作

[6] 議論を，両立する量の有限集合まで広げることは簡単である．

[7] どんな射影作用素 $\widehat{P}$ も，少なくとも 1 つの自己共役作用素のスペクトル表現に現れる．例えば $\widehat{P}$ は自己共役であってそれ自身のスペクトル表現である！

[8] 以降，かさばる表記 $\mathcal{H}_{\widehat{P}_T}$ (T は命題をあらわす) はすっきりと $\mathcal{H}_T$ と書こう．

用素を共有して，$\mathbb{R}$ の部分集合 Δ と Δ' に対して $\widehat{P}_{A\in\Delta} = \widehat{P}_{B\in\Delta'}$ である場合，我々は命題 $A \in \Delta$ と $B \in \Delta'$ が**物理的に等しい**と言う ($[\widehat{A}, \widehat{B}] \neq 0$ のとき，この定義に関連して前節の議論を思い出そう).

この命題−射影作用素対応に関する重要な問題は，以下のようになるだろう:

- 射影作用素によって表される命題の正確な性質，
- 「真」と「偽」の概念がそのような命題にどのように適用されるか[9]，
- 古典物理学での命題の集合に対して，状態と物理量の数学的な表現からブール代数の構造を見出した方法 (4.2 節で議論された) を量子論に応用すること．

射影作用素によって表される命題の性質は，採用される量子論の解釈に依存する．実在論は，射影作用素 $\widehat{P}_{A\in\Delta}$ は，A の値が Δ にあれば値 1 を，それ以外は 0 を与える物理量を表す，と言うだろう．この場合命題 $A \in \Delta$ は次のようになる:
$A \in \Delta$ の**実在論の解釈**：

「A は値を**持つ**．そしてこの値は部分集合 Δ の中にある.」

もちろんこれは，そのような主張がいつ正当化されるかという問いには答えない．古典物理学での状況は明白である．つまり $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ が $f_A(s) \in \Delta$ である時に限り，命題は状態 $s \in \mathcal{S}$ で真実である．しかし，我々が Kochen・Specker の定理の議論において見たように，量子論では全ての量が本来的に値を持っているとする試みは，これらの性質が文脈に依存すると考えなければ実現できない．この場合には，他の両立する命題

9 「真」または「偽」を主張するとき，以下のものを区別するのが重要である: (i) 命題が真あるいは偽というとき，そのことによって何が意味されているか，(ii) その主張をすることが正当化される条件．実証哲学者はそれらを混同する傾向があった，しかし現代の哲学者はより慎重である．そのような問題の良い最近の議論は，Grayling (1990) である．

を同時に考察することなく，その命題だけが真であるか偽であるかと言っても意味がない．

1つの可能性は，物理量 A が値「a」を**持つ**ということを控えめに，(i) a が $\widehat{A}$ の固有値であり[10]，そして (ii) 状態 $\vec{\psi}$ が，その固有空間 $\mathcal{H}_{A=a}$ にある時に限ることである．すると，$A \in \Delta$ の実在論的解釈の最初の部分が,『A が値...を持つ』，なので，$A \in \Delta$ が真であることは，$|\psi\rangle$ が $\widehat{A}$ の固有空間のうちの1つに属していることを要求する．このように，$|\psi\rangle$ は $\widehat{A}$ の固有ベクトルでなければならない．第二の部分『...，そしてこの値は Δ の中にある』は，対応する固有値が集合 $\Delta = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$ に属していなければならないことを意味する．最初の条件により,（理論は $\mathrm{Prob}(A \in \Delta; \vec{\psi}) = 1$ を与えるにも拘らず）固有空間 $\mathcal{H}_{A=a_1}, \mathcal{H}_{A=a_2}, \ldots, \mathcal{H}_{A=a_d}$ の1つ以上の要素の**和**で書けるどんな $\vec{\psi}$ も除外される点に注意しよう．この場合，スペクトルの射影作用素 $\widehat{P}_{A\in\Delta}$ を命題 $A \in \Delta$ を表すとみなすことは，明らかに不適当である．従って，命題－射影作用素対応を固持するためには，$\widehat{P}_{A\in\Delta}\vec{\psi} = \vec{\psi}$(つまり $\vec{\psi}$ は，対応する固有値が Δ にある $\widehat{A}$ の固有ベクトルの任意の線形結合で書ける) ならば $A \in \Delta$ が状態 $\vec{\psi}$ で真実である，という，より弱い条件を採用するのが自然であろう．

状況は，量子論への道具論の方法では少しはっきりしている．つまり，物理的観測量を表す射影作用素 $\widehat{P}_{A\in\Delta}$ は，操作上それが測られる方法を指定することによって定義される．つまり A を測りその結果が Δ にあるならば数1を観測量に割り当て，それ以外は0を割り当てる．命題 $A \in \Delta$ は，A の**測定**が部分集合 Δ にある結果を生じること，と解釈されなければならない．

表面上は，主張『A の測定をすれば結果は Δ にある』ということは単一の系に適用できる．これは『A が Δ にある値を持つ』という実在論的主張と同様である．しかし道具論の命題形式は，ものはどうあるかという主張ではなく，特定の測定が**行われれば**あることが起こる**だろう**，と言う

---

[10] これは，$\widehat{A}$ のスペクトルが連続的部分を含むならば，慎重に言い直すことを必要とする．

主張である．これは，実証論型の検証を要求するようである．つまり 測定して結果を観察する — 結果が Δ に無いならば，命題は確かに偽である．

しかし，結果が Δ に**ある**ときはどうだろう？ これは命題が真であることを意味するだろうか？ 命題をもっと正確に次のように言いなおしてみれば，そうでないことがわかる．

$A \in \Delta$ の**様態上の解釈**：

「A の測定をすれば，**必然的に**結果は部分集合 Δ にある」

この形で言うと，命題は明白に事実に反し，1 度あるいは有限回の測定では確かめることができない[11,12]．実際に，この形式でいうと，命題は個々の系でなく，繰り返された測定の総体に対して適用できるのである．このように状態と命題は総体だけに適用される．

上の議論から，量子論の相対頻度，反実在論の解釈においては，命題 $A \in \Delta$ の意味が自然に以下のようになる理由が明白だろう．

$A \in \Delta$ の**確率 1 の解釈**：

「A の測定において，**確率 1** で結果は Δ にある.」

この場合，どんなときに真であるかは明確である．すなわち

「量子状態 $\vec{\psi}$ に対して，射影作用素 $\widehat{P}_T$ によって表される
命題 T は，$\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi}) = 1$ ならば真である.」

解説

1. $\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi}) = \| \widehat{P}_T\vec{\psi} \|^2$ から，状態 $\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi}) = 1$ は $\widehat{P}_T\vec{\psi} = \vec{\psi}$ を意味する [演習問題]．つまり $\vec{\psi}$ は，実際固有値 1 の $\widehat{P}_T$ の固有ベクトルである．

2. この結果は，固有値が Δ の中にある固有ベクトルの**線形結合**で書かれる任意の状態 $\vec{\psi}$ で，命題 $A \in \Delta$ が真であることを意味する．もちろん，

---

11 量子論での様態概念の広範な議論は Van Frassen (1991) を参照.

12 量子論での反事実的な主張の一般的な議論は，Peres (1993) にある．

これは任意の**特定の**固有値を得る確率が 1 であることを意味**しない**．実際に，$\vec{\psi}$ が固有空間のうち複数の展開係数を持つならば，この数は 1 より小さい．実在論の場合とは異なり，$A \in \Delta$ の解釈において，A の測定が必ずしも Δ の任意の 1 つの**特定の**要素を与えるとは言わないから，これは問題を引き起こさない．

3. この形式で命題を取り扱うときは少し配慮が必要である．例えば，命題 $A = a_m$ を，『A を測ると結果は必然的に a_m である』と解釈すると，状態が $\vec{\psi}$ であるとき，$\mathrm{Prob}(A = a_m; \vec{\psi})$ の値は命題が真であるという確率とは解釈できない．むしろ $\mathrm{Prob}(A = a_m; \vec{\psi})$ は，結果が a_m となる系全体の上の相対度数を与える．例えば，主張『「A の測定で結果は必然的に a_m である」という命題が真である確率が 70%である』と言うのは，『A の測定で結果が a_m である確率は 70%である』と言うのとは全く違う．主張 $\mathrm{Prob}(A = a_m; \vec{\psi}) = 0.7$ によって量子論で意味するのは後者である．必要に応じて，以下のように様態上の解釈を拡張することも可能である．

> 「A の測定をしたとき，その結果が Δ にあるという確率は r である」

ここで，実数 r は $0 \leq r \leq 1$ を満たす．特別な値 $r = 1$ は，上で議論した確率 1 の解釈に対応する．しかし，我々はこの拡張をここで追究しない．

9.2.2 「偽」は「真でない」と同じか？

次に考察する問題は，何をさして命題が**偽である**と言うと定めるかということ，そして量子論ではそのような主張がどんな状況の下で正当化されるかということである．古典物理学や古典論理には困難な問題は無い．命題は，真でない場合だけ偽である．

量子論でこの古典的考えを採用するならば，『$A \in \Delta$ は偽』というのは，A のたくさんの測定で Δ に無い値が有限の相対頻度で現れることを意味する．一般にこれは，$\mathrm{Prob}(T; \vec{\psi}) < 1$ ならば命題 T が状態 $\vec{\psi}$ で偽である，という定義を示唆する．

他方，実在論者は，Δ の中の値を見出す確率がまだあるにもかかわらず，命題 $A \in \Delta$ は偽である，という考えにしりごみするかもしれない．量子論の既存の理論形式に直面しているとき ― 特に，命題が射影作用素と関係しているという考えに対して ―実在論は，状態 $\vec{\psi}$ での真と偽の最も自然な記述は次のようになると考えるだろう：命題 $A \in \Delta$ は，(i) 状態 $\vec{\psi}$ においてもし $\mathrm{Prob}(A \in \Delta; \vec{\psi}) = 1$(つまり $\vec{\psi} \in \mathcal{H}_{A\in\Delta}$) なら真で，(ii) もし $\mathrm{Prob}(A \in \Delta; \vec{\psi}) = 0$(つまり $\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{\perp}_{A\in\Delta}$) なら偽である．

しかし，任意のベクトル $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ は $\mathcal{H}_{A\in\Delta}$ と $\mathcal{H}^{\perp}_{A\in\Delta}$ の要素の和として書かれるので，命題 $A \in \Delta$ は，両方の構成要素が有限であれば，真であるとか偽であるとか言えない．これはある種の多価の論理が使われなければならないことを示唆する．そして実際にこの型のいくつかの試みがなされた．最も単純な方法 (Reichenbach (1944) によって最初に提案された (Putnam (1957) も参照)．) は，命題が真であるか，偽であるか，不確定であるかという三値論理を使うことである[13]．量子力学の典型的な状態である，固有ベクトルの自明でない重合せは，真でも偽でもない不確定のカテゴリーに割り当てられる．

より複雑な可能性は，状態 $\vec{\psi}$ での命題 T の真値 $\mathrm{Prob}(T; \vec{\psi})$ が 0 と 1 の間にくるような連続スペクトルを使うことである．これは，**ファジー**論理の背後にある考え方である．いずれにせよ，単一系に適用される，真でもなく偽でもない命題とはどんな意味を持つのか不明である．哲学者はこれを議論したが決定的な結論は出てこなかった．さらに，数学的な理論形式の範囲内で，古典的二値論理の発展としての多価論理を使用するというアイデアについて重大な懸念が表明された．

多価論理に関する重大なもう一つの問題は，普通の論理的連接詞，つまり 4.2 節で古典物理学の文脈で導入された「そして」「あるいは」「否定」と「論理的含意」に対応する適切な定義を見出すことである．多様な試みが数学的なレベルでなされたが，誰もが合意するはっきりした結論は出てこなかった．

---

[13] スコットランドでは，陪審は有罪・無罪・立証不能の評決を下すことができる．しかし，もちろん被告人は実際，有罪であるか無罪であると仮定される．Kochen・Specker の定理は，法律の分野にはまだ応用されていないのである！

論理的連接詞に伴う困難は，以下のように考えると軽減される．命題 $A \in \Delta$ は，それが真でない，つまり $\mathrm{Prob}(A \in \Delta; \vec{\psi}) < 1$ ならば，状態 $\vec{\psi}$ において偽であるとするのである．この方法は，量子論の道具論解釈において全く自然で，真偽二価の命題の構造ができる．ただ「真」「偽」の関係が非対称になってしまうが．もちろんそれでも，論理的連接詞を定義するのは必要なのである．

9.2.3　論理的連接詞

真偽二価命題の集合の上の「量子論理」の建設はずいぶん昔に，Birkhoff & von Neumann (1936) の有名な論文において最初に議論され，それは以降興味ある研究を刺激した．彼らは，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の全ての閉部分空間の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$(同等であるが，全ての射影作用素の集合) から出発した．そして，古典論理演算に対応するものを提案した．基本的な定義は次の通りである．

1. 次の場合，命題 T はもう一つの命題 U を**意味する** ($T \preceq U$ と書く)：$\mathrm{Prob}(T; \vec{\psi}) = 1$ なる全ての状態 $\vec{\psi}$ に対して $\mathrm{Prob}(U; \vec{\psi}) = 1$ となる．つまり T が真である全ての状態は U でも真である．これは，$\mathcal{H}_T$ が $\mathcal{H}_U$ の閉じた部分空間であることに等しい．類似した古典的な関係は，$\mathcal{S}_T \subset \mathcal{S}_U$(4.3 節を参照) である．

$\widehat{P}_T$ と $\widehat{P}_U$ がそれらに関連する射影作用素ならば，関係 $T \preceq U$ は

$$\widehat{P}_T \widehat{P}_U = \widehat{P}_U \widehat{P}_T = \widehat{P}_T \tag{9.11}$$

に同等で，これを $\widehat{P}_T \preceq \widehat{P}_U$ と書く．

T が U を意味し，U が T を意味するならば，命題 T と U は等価であるとするのが自然である．実際，前者は $\widehat{P}_T \widehat{P}_U = \widehat{P}_T$ と $\widehat{P}_T \widehat{P}_U = \widehat{P}_U$ を意味するので $\widehat{P}_T = \widehat{P}_U$ である．そして，これは以前に提案された物理的同等の定義そのものである．古典物理学で扱う適切な対象は，命題の**同値類**であり，量子論の場合には，射影作用素の同値類である．このように，射

影作用素 (または同等に，位相的に閉じた部分空間) の上で定義されるものとして論理演算を規定する方が，**本質的に**命題の上で定義するより適切である．

2. 常に偽の命題に対応する作用素は，$\mathcal{H}$ のあらゆるベクトルを零ベクトル $\vec{0}$ に写像する零作用素 $\widehat{0}$ である．そして，**常に真**の命題に対応する作用素は単位作用素 $\widehat{\mathbb{1}}$ である．このように，任意の射影作用素 $\widehat{P}$ は，$\widehat{0} \preceq \widehat{P} \preceq \widehat{\mathbb{1}}$ をみたす．古典物理学で，これら 2 つの命題に対応するのは，それぞれ空集合 $\emptyset$ と全空間 $\mathcal{S}$ である．そしてもちろん，$\mathcal{S}$ の全ての部分集合 $\mathcal{S}_T$ に対して $\emptyset \subset \mathcal{S}_T \subset \mathcal{S}$ となる．

3. 命題 T に対して，命題 $\neg T$(T でない) は，任意の状態 $\vec{\psi}$ に対して，$\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi}) = 0$ のときに限り $\mathrm{Prob}(\neg T;\vec{\psi}) = 1$ である，と定義する．これは関係 $\mathcal{H}_{\neg T} = (\mathcal{H}_T)^{\perp}$ に等しい．この関係は $\neg T$ を表す射影作用素 $\widehat{P}_{\neg T}$ を一意的に決定する:

$$\widehat{P}_{\neg T} = \widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P}_T \tag{9.12}$$

そしてそれは実際に，任意の状態 $\vec{\psi}$ に対して，T と $\neg T$ の確率の関係

$$\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi}) + \mathrm{Prob}(\neg T;\vec{\psi}) = 1 \tag{9.13}$$

(見かけ上，より強い) を意味する．式 (9.12) に古典論で対応するのは，$\mathcal{S}_{\neg T} = \mathcal{S} - \mathcal{S}_T$，または式 (4.17) である．

古典的な場合と違って量子論の定義は，$\neg T$ が真 (つまり $\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi}) = 0$) でない**にもかかわらず**，$T$ が状態 $\vec{\psi}$ で**偽** (つまり T は真でなくて，$\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi}) < 1$) でありえる，という独特な特性を持つ．しかし予想通りに，$\neg T$ が真であれば T が偽であることを**意味する**！この奇妙な非対称性の由来は，(i) 作用素 $\widehat{P}_T$ の固有状態の線形結合の存在，そして (ii) 我々が，3 値でなく 2 値の論理を用いたところにある．

4. 一対の命題 T と U があって，それぞれ対応する閉部分空間 $\mathcal{H}_T$ と $\mathcal{H}_U$，および射影作用素 $\widehat{P}_T$ と $\widehat{P}_U$ を持つとする．ここで，命題 $T \wedge U$(T と U に関する論理積のある型) を以下のように定義しよう：状態 $\vec{\psi}$ に対し

て，$\mathrm{Prob}(T;\vec{\psi})=1$ と $\mathrm{Prob}(U;\vec{\psi})=1$ であるときに限って，$\mathrm{Prob}(T\wedge U;\vec{\psi})=1$ である．つまり $T\wedge U$ は，状態 $\vec{\psi}$ で T と U が両方とも真である時に限って，真である．これは

$$\mathcal{H}_{T\wedge U}=\mathcal{H}_T\bigcap\mathcal{H}_U \tag{9.14}$$

を意味し，古典的な結果 $\mathcal{S}_{T\wedge U}=\mathcal{S}_T\bigcap\mathcal{S}_U$(**cf.** 式 (4.15)) を思い出させる．

部分空間に関して表現すると，量子論の定義は自然である．しかし，$\mathcal{H}_T\bigcap\mathcal{H}_U$ の上へ射影する作用素 $\widehat{P}_T\wedge\widehat{P}_U:=\widehat{P}_{T\wedge U}$ が射影作用素 $\widehat{P}_T$ と $\widehat{P}_U$ の単純な関数でないので，それを射影作用素の言語に翻訳する単純な方法がない．もし $[\widehat{P}_T,\widehat{P}_U]=0$ ならば，命題 $T\wedge U$ を表す射影作用素 $\widehat{P}_T\wedge\widehat{P}_U$ が

$$\widehat{P}_T\wedge\widehat{P}_U=\widehat{P}_T\widehat{P}_U \tag{9.15}$$

であることを示せる．そうでなければ，言えることは

$$\widehat{P}_T\wedge\widehat{P}_U=\lim_{k\to\infty}(\widehat{P}_T\widehat{P}_U)^k \tag{9.16}$$

だけである．この極限には，有界作用素列の収束の適当な概念を使う．

5. 古典物理学では，一対の命題 T と U の論理和 $T\vee U$(T または U) を表す集合は，集合 $\mathcal{S}_T$ と $\mathcal{S}_U$ の合併 $\mathcal{S}_T\bigcup\mathcal{S}_U$ である．つまり それは $\mathcal{S}_T$ と $\mathcal{S}_U$ を含む状態空間 $\mathcal{S}$ の最も小さい部分集合である．

量子論で明らかに対応するのは，$\mathcal{H}_T$ と $\mathcal{H}_U$ の合併と等しい集合 $\mathcal{H}_{T\vee U}$ と考えられるかもしれない．しかし，$\mathcal{H}_T\bigcup\mathcal{H}_U$ は $\mathcal{H}$ の**線形**部分空間でないのでこれは正しくない．つまりベクトルの和の演算の下で閉じないのである．これは，より適切な定義が $\mathcal{H}_{T\vee U}:=\mathcal{H}_T+\mathcal{H}_U$ であることを示唆する．それは $\mathcal{H}_T$ と $\mathcal{H}_U$ の任意のベクトルの線形和であると定義される．しかし $\mathcal{H}$ が無限次元なら，$\mathcal{H}_T+\mathcal{H}_U$ が位相的に閉じないかもしれないので，これさえ正しくない．この欠陥は，最終的な定義

$$\mathcal{H}_{T\vee U}:=\overline{\mathcal{H}_T+\mathcal{H}_U} \tag{9.17}$$

によって修正される．これは，$\mathcal{H}_T$ と $\mathcal{H}_U$ を含む $\mathcal{H}$ の位相的に閉じた線形部分空間のうち，最小のものである．

論理積の場合と同様，関連する射影作用素に関して定義式 (9.17) を書く簡単な方法がない．しかし，$[\widehat{P}_T, \widehat{P}_U] = 0$ ならば，命題 $T \vee U$ を表す射影作用素 $\widehat{P}_T \vee \widehat{P}_U := \widehat{P}_{T \vee U}$ は

$$\widehat{P}_T \vee \widehat{P}_U = (\widehat{P}_T + \widehat{P}_U - \widehat{P}_T \widehat{P}_U) \tag{9.18}$$

である．特に $\widehat{P}_T \widehat{P}_U = 0$ なら $\widehat{P}_T \vee \widehat{P}_U = \widehat{P}_T + \widehat{P}_U$ となる (古典論では式 (4.16) であった).

解説

1. $\mathcal{H}$ の閉じた部分空間 $\mathcal{H}_T$ と $\mathcal{H}_U$ は，方程式

$$\overline{\mathcal{H}_T + \mathcal{H}_U} = \left(\mathcal{H}_T^{\perp} \bigcap \mathcal{H}_U^{\perp}\right)^{\perp} \tag{9.19}$$

を満たす．これは，論理的恒等式 $T \vee U = \neg(\neg T \wedge \neg U)$ に対応する古典的な集合論の DeMorgan 規則

$$\mathcal{S}_T \bigcup \mathcal{S}_U = \mathcal{S} - \Big((\mathcal{S} - \mathcal{S}_T) \bigcap (\mathcal{S} - \mathcal{S}_U)\Big) \tag{9.20}$$

に対応する．これは，論理的連接詞の上記の表現に，更なる正当化を提供する．

2. 論理的連接詞の表現を解釈する際に，特に「$T \wedge U$」について，注意が必要である．2 つの作用素が交換する場合だけ，$\wedge$ を通常の意味での「かつ」と考えても良いだろう．というのは，以前に議論したように，この場合にのみ両方の特性を同時に合わせ持つ系の状態が存在すると言えるからである[14]．非可換な場合に式 (9.16) は，$T \wedge U$ は T と U の測定の無限列の結果に対しての主張であるとみなされる．

3. 作用素の大部分のペアが交換**しない**という事実は，$\wedge$ と $\vee$ に関する上の定義に付随する量子命題の代数的構造が，分配側を満たさないという重要な特性として反映される．

[14] これは完全には正しくない．交換しない一対の作用素に対して，同時固有ベクトルが存在しうる．しかしこれらのベクトルは，必然的に，基底系をつくるにはあまりに少ししかない．

これは，簡単な例を用いて見ることができる．二次元のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の一次元の部分空間である $\mathcal{H}_{\psi_1}$ と $\mathcal{H}_{\psi_2}$ を考える．それぞれが線形独立なベクトル $\vec{\psi_1}$ と $\vec{\psi_2}$ で張られる (つまりすべての複素数倍) とする．そして，$\vec{\phi}$ を $\vec{\psi_1}$ と $\vec{\psi_2}$ の任意の自明でない線形結合であるとする．すると $\mathcal{H}_{\psi_1} + \mathcal{H}_{\psi_2} = \mathcal{H}$ なので，$\mathcal{H}_\phi \bigcap (\mathcal{H}_{\psi_1} + \mathcal{H}_{\psi_2})$ は単に $\mathcal{H}_\phi$ である．一方，$(\mathcal{H}_\phi \bigcap \mathcal{H}_{\psi_1}) + (\mathcal{H}_\phi \bigcap \mathcal{H}_{\psi_2})$ は + 記号の各項の部分空間が零であるので，零ベクトルである．これと対照的なのは，式 (4.18) で示された古典的命題の分配則であり，その性質は状態空間の部分集合に対する共通部分・合併集合の代数学のブール的性質によっていたことを思い出そう．

量子論の大部分の不思議な古典的でない特徴は，量子命題の論理的構造のこの非分配的な特性までさかのぼることができる－そしてこのことが，量子論に対する**量子論理**の方法を動機付けた．これはヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の全ての射影作用素の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ の非分配的な構造に注目することから始まる．そしてそれは量子論において，古典物理学のブール論理に対応するとみなされる．量子論への新しい方法を構築するためにこの特性を抽出し，基本構成物として，状態のヒルベルト空間と付随する自己共役作用素でなく，推定命題の非分配的な代数とこの代数上の確率測度とすることが考えられる．

この視点で量子論の根底にある構造を検討し，標準的なヒルベルト空間の理論形式を越える新らしい型の量子論を構成する多くの研究がある．この視点は，繰り返された測定の結果でなく根源的に所有された特性だと命題を解釈する，量子論の実在論的方法に対しても重要である．この分野への良い入門は Jauch (1973) と Hughes (1989) である．より包括的な記述は Beltrametti & Cassinelli (1981) にある．

9.2.4　Gleason の定理

6.1 節で議論した密度行列の確率規則は，任意の命題 P と対応する射影

作用素 $\widehat{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ に対して，状態 $\widehat{\rho}$ において P である確率が

$$\mathrm{Prob}(P;\rho) = \mathrm{tr}\left(\widehat{\rho}\,\widehat{P}\right) \tag{9.21}$$

であることを意味する．これは，興味深く重要な問題を提起する．確率を $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ の要素に割り当てる他の方法があるだろうか？あるいは標準量子論の形式は一意的だろうか？より正確に言うと，あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ とその部分空間/射影作用素の非分配的な代数 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ から出発して，新しい確率的理論を見つけることができるだろうか？それから式 (9.21) の型で**ない**確率写像 $\mathrm{Prob} : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ を造ることができるだろうか？特に，そのような理論の状態空間は何であろうか？これは，量子論理の初期に研究された最も重要な問題であった．非標準理論が (特に隠れた変数を含んで) このように造れるという予想だったのである．

この問題に取り組むために,「確率写像」$\mathrm{Prob} : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ がどんな条件を満たさなければならないか初めに決めなければならない．古典統計物理学での類似の問題が，4.3 節で少し提起された．そこでは一般的な「確率測度」は $\mathcal{S}$ の部分集合の実数値関数 μ であり，3 つの条件式 (4.12–4.14) を満たすと定義された．

量子論の場合，1 つの明らかな条件は，全ての命題 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ に対して $0 \leq \mathrm{Prob}(P) \leq 1$ である．あと 2 つの (本質的に当たり前の) 条件は $\mathrm{Prob}(\emptyset) = 0$ と $\mathrm{Prob}(\mathbb{1}) = 1$ である．ここで $\emptyset$, $\mathbb{1}$ はそれぞれ常に偽，真である命題である．重要なのは，一対の命題 T と U に対して確率 $\mathrm{Prob}(T \wedge U)$ と $\mathrm{Prob}(T \vee U)$ をどうするかである．

古典物理学における類似の問題を考察することから始めよう．4.2 節で議論されたように，命題は状態空間 $\mathcal{S}$ の部分空間に対応する．この場合には，$\mathcal{S}_{T\wedge U} = \mathcal{S}_T \bigcap \mathcal{S}_U$ および $\mathcal{S}_{T\vee U} = \mathcal{S}_T \bigcup \mathcal{S}_U$ に注意すれば，1 つの条件が

$$\mathrm{Prob}(T \vee U) = \mathrm{Prob}(T) + \mathrm{Prob}(U) - \mathrm{Prob}(T \wedge U) \tag{9.22}$$

であることは，ベン図を用いてすぐわかる．

両立しない観測量の問題があるため，量子論の場合にこの条件をすぐには使えない．しかし，部分空間 $\mathcal{S}_T$ と $\mathcal{S}_U$ が共通の要素をもたない (つま

り $\mathcal{S}_T \bigcap \mathcal{S}_U = \emptyset$) という特別な場合は，対応する命題は相互に排他的である．この場合，式 (9.22) は**有限和**の条件

$$\text{Prob}(T \vee U) = \text{Prob}(T) + \text{Prob}(U) \tag{9.23}$$

になる．これは，相互に排他的な命題の任意の有限集合 $\{P_1, P_2, \ldots, P_M\}$ に対して

$$\text{Prob}(P_1 \vee P_2 \cdots \vee P_M) = \sum_{i=1}^{M} \text{Prob}(P_i) \tag{9.24}$$

と一般化される．古典的な確率論での重要な技術的条件は，**可算和**が可能であること，つまり条件式 (9.24) は，極限 $M \to \infty$ でも成立しなければならないことである．

2 つの相互に排他的な命題の量子論版は，直交する一対の射影作用素 $\widehat{P}_T, \widehat{P}_U$ である．つまり $\widehat{P}_T \widehat{P}_U = 0 = \widehat{P}_U \widehat{P}_T$．この場合，非両立性の問題は無く，式 (9.24) は，互いに直交する射影作用素の任意の集合に対して $\widehat{P}_1 \vee \widehat{P}_2 \cdots \vee \widehat{P}_M = \sum_{i=1}^{M} \widehat{P}_i$ の形になる．古典的な場合のように，この条件を極限 $M \to \infty$ にまで広げたい．以上をまとめると，任意の量子確率関数 $\text{Prob} : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ の最低限の条件は，相互に直交する射影作用素の任意の有限あるいは可算無限集合 $\{\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \ldots\}$ に対して，

$$0 \leq \text{Prob}(\widehat{P}) \leq 1 \qquad \text{, 任意の } \widehat{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \tag{9.25}$$

$$\text{Prob}(\widehat{0}) = 0, \qquad \text{Prob}(\widehat{\mathbb{1}}) = 1 \tag{9.26}$$

$$\text{Prob}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{P}_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Prob}(\widehat{P}_i) \tag{9.27}$$

であるということである．一般的に，そのような集合は，自己共役作用素のスペクトル射影作用素として生じる．

6.1 節で見たように，式 (9.25–9.27) を満たすひとつの方法は

$$\text{Prob}(\widehat{P}) := \text{tr}\left(\widehat{\rho}\,\widehat{P}\right) \tag{9.28}$$

を定義することである．ここで，$\widehat{\rho}$ は任意の密度行列．Gleason (1957) による驚くべき定理は，$\dim \mathcal{H} > 2$ なら，逆が真であることである．

式 (9.25–9.27) を満たす**唯一の**方法は，密度行列と式 (9.28) を用いる方法である．証明は本質的に幾何学的である．そして，Gleason の結果と Kochen・Specker の定理の間には多くの技術的な関連がある．

Gleason の定理は，標準的な量子論を修正する任意の試み，例えば隠れた変数理論の建設において強い制約を与える．さらに密度行列が量子論で重要である深い理由も与えている．

9.3 非局所性と Bell の不等式

9.3.1 EPR と量子論の不完全さ

「隠れた変数」と「所有される特性」が直面している第二の大きな問題は，Einstein, Podolsky & Rosen (1935) による有名な論文において最初に明白にされた．彼らの最初の議論は技術的に複雑なので，最近は Bohm (1951) による単純化された議論を使う．彼は，ある粒子が崩壊して，2 つのスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を発生し，このとき全体のスピン角運動量が零となる過程を考察した．これらの粒子は反対方向に互いに飛び去って，観測者 (例えば N と L) がそれぞれの粒子のいろいろな方向に沿ったスピンを測定する．両方の観測者が特定の方向 $\mathbf{n}$ に沿ってスピンを測ることを申し合わせるならば，上で課した全スピンへの制約は以下のことを意味する．つまり N が $+\frac{1}{2}\hbar$ を測るならば，L は必然的に結果 $-\frac{1}{2}\hbar$ を得る，そして，N が $-\frac{1}{2}\hbar$ を測るならば，L は必然的に $\frac{1}{2}\hbar$ を得る．

そのような相互関係が，古典物理学において分析されるならば驚きは無い．崩壊後生じた 1 つの粒子は，特定のある方向のスピンを持ち，そして角運動量保存のため，第二の粒子は単に反対方向のスピンを持って出てくると保証されているのである．このように，2 人の観測者による測定における 100%反相関は，両粒子が実際 (反) 相関したスピンの値を**持っている**事による．そしてこれは崩壊後から測定がなされるまで当てはまる．ここにパラドックスは無く，すべては古典物理学の単純な現実的見方と調和する．

量子論での状況は根本的に異なる．2つの観測装置の z-軸に沿って測定がなされるとしよう．2つの粒子の状態のうちスピン部分は，式 (8.46) のように固有ベクトルを用いて

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\big) \tag{9.29}$$

と書ける．ここで，例えば $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ は粒子1と2がそれぞれスピン $+\frac{1}{2}\hbar$ と $-\frac{1}{2}\hbar$ を持つ状態である．つまり $\widehat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar|\uparrow\rangle$ そして $\widehat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar|\downarrow\rangle$.

実用論あるいは道具論による，もつれた状態 $|\psi\rangle$ の解釈は直接的である．N による一連の繰り返し測定において，N の測定がスピンアップを与える粒子のペアを選択してくると，— 確率1で — これらのペアの L による一連の測定はスピンダウンとなる．同じように，N の測定でスピンダウンなら，確率1で，L の測定はスピンアップとなる．この相関は，N による測定 (作用素 $\widehat{S}_z \otimes \widehat{\mathbb{1}}$ で計算する) が，スピンアップかスピンダウンの結果が選ばれるかどうかによって，$|\psi\rangle$ からそれぞれ $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ あるいは $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ への状態ベクトルの収縮を**引き起こした**と解釈できる．この新しい状態は，第二の粒子の作用素 $\widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{S}_z$ の固有状態である．そしてその固有値は N が得る結果とまさに反対のものである．

この記述は量子論の実用論の立場では許容できるが，式 (9.29) のもつれた状態の実在論的解釈をしようとすると困難を生じる．明らかな問題は，各々の観測者の個々の結果に関する情報が，いかにして，他方の粒子に「到着」し，二番目の観測者によって行われた結果を整合的なものにするかである．

古典物理学の論法に訴えれば，両方の粒子が常に適当な値を**所有しているる**と主張できるかもしれない．しかし，標準的な量子論で，測定後特定の結果が得られることが保証される唯一の状態は，観測量の固有ベクトルである．しかし，式 (8.46) での状態 $|\psi\rangle$ は，この型で**なく**，それは量子もつれの典型的特徴を見せて，実際そのような固有状態の重合せである．そして，隠れた変数の理論に解決を訴えるどんな試みも，Kochen・Specker の定理を切り抜けなければならない．この描像が特殊相対性理論と矛盾しないかどうかの問題もある．つまり2人の観測者による測定が空間的隔た

りを持つ場合 (それは簡単に準備できる) 最初の測定をするのはどちらか — そして，標準的解釈において，状態ベクトルの収縮を引き起こすのはどちらか — ということは座標系に依存している．

問題は，観測者がスピンの z 成分でなく x 成分を観測するなら更に複雑になる．式 (9.29) の状態は，S_x 固有ベクトルに関して式 (8.50) のように書ける．

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(|\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle - |\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle\bigr) \tag{9.30}$$

ここで，$|\rightarrow\rangle$ と $|\leftarrow\rangle$ は作用素 $\widehat{S}_x$ の固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ と $-\frac{1}{2}\hbar$ にそれぞれ対応する．

式 (9.30) は予想どおり，S_x 測定の場合と同じように，観測量 S_z の測定に関して 100%反相関がある．この議論は一般化されて，**任意の**単位ベクトル $\mathbf{n}$ に対して式 (9.29) は，$\mathbf{n}$ に沿うスピン作用素の射影 $\mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{S}}$ の固有ベクトル 2 つの反相関する項の和として書き直せる．このように古典的な型の議論によれば，崩壊の瞬間から，両方の粒子が**任意の**軸に沿ったスピンの正確な値を所有したと結論しなければならない．これは，角運動量の交換関係に付随する不確定性関係と矛盾するように見える．

アインシュタイン，ポドルスキーとローゼンは，これらの問題を考察して，困難解決の道が 2 つだけあることを結論した:

1. N が測定をするとき，何らかの方法で結果が粒子 2 へすぐに伝達し，その状態を適切な固有ベクトルに変える．あるいは，
2. 量子論は不完全で，系全体の部分的な情報だけを提供する．

1 の可能性を考える際に，最初の測定がなされる前に，2 つの粒子が十分長い距離離れている場合もあるのだから,「すぐに」情報が伝達するというのは，特殊相対性理論の精神 (法則でないにしても) に甚だしく矛盾する．従ってアインシュタインがこの選択肢をあまり支持しなかったことは，驚くことではないだろう！この非局所的効果が起こる機構について，量子論は何も言わないのは不満足であり，この意味でも理論は不完全である．

アインシュタイン，ポドルスキーとローゼンは理論が実際に不完全であるという結論に達したが，どのようにしたら理論が「完全」になるかを

与えなかった[15]. 1つの自然な考え方は,「隠れた変数」が存在して, その値は通常の方法では操作できないが, 測定においてその変数は実際の測定値を決定付ける—古典統計物理学における微視状態のように—, とすることである. しかし, 量子力学の実験結果をうまく再現するように, 隠れた変数の理論を構成することは単純な問題ではない. 特に, そのような理論は, 不確定性関係を破る状態を用意できないという意味で, (零でない交換関係により) 特定の両立しない観測量があることを説明する必要がある. さらに, Kochen-Specker 定理と整合する必要もある.

従来の量子論の結果を再現する隠れた変数理論が, 実際存在する[16]. しかし, それらは上で議論したのと同じくらい奇妙な非局所性をあらゆるところに含む. これは特定の理論の欠点で他の理論がこの問題なしに存在するかもしれない, と考えるかもしれない. しかし, ジョン・ベルの非常に有名な結果は, これが不可能であることを示す. すなわち, 正確に量子論の結果を再現するどんな隠れた変数理論も, 必然的に著しい非局所性を備えている. この結果は, 量子論の概念上の難問を理解する際に重要であり, 次節と最終節のテーマである.

9.3.2 Bell の不等式

Kochen-Specker の結果と同様に, 我々が議論しようとしている非局所性の特性は, 隠れた変数の理論だけの特徴ではない. 古典物理学の場合のように, 個々の系がその物理量の値を**所有する**と主張する**あらゆる**実在論の量子論解釈に適用される. 我々はまず, 局所的である任意の理論において, 特定の相関関数が満たす不等式を引き出す. そして, 量子論の予測がどのようにこの不等式を破るかについて見ていこう. Bell のはじめの議論以降,「Bell の不等式」の多くの例が発見されているが, ここでは簡単な議

---

[15] アインシュタインの実在論への視点と量子論の繊細な解析は, Fine (1986) 参照.

[16] デイビッド・ボームは, 有名な例を考案した. 彼の示唆に富んだ包括的な方法は Bohm & Hiley (1993) 参照. 非常に面白く読める最近のもう一つの文献は, Holland (1993) である.

論を用いよう (この例の詳しい議論は Redhead (1989) 参照).

EPR の考察は，同じ軸に沿って測定をする 2 人の観測者を考察した．ジョン・ベルは，観測者が異なる軸に沿って粒子のスピンを測る場合を考察して不等式を見つけた．特に，1 人の観測者に対して一対の単位ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$，もう一人の観測者に対して $\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}'$ を考察する．量子状態が式 (9.29) のベクトル $|\psi\rangle$ によって記述される系全体に対して繰り返し測定がなされるとしよう．例えば一連の崩壊を考え，各崩壊においては全スピン角運動量 0 の一対の粒子を発生するとしよう．我々が吟味しようとする実在論の中心となる仮定は，各々の粒子がいつもスピンの任意の方向に確かな値を持つということである．一連の崩壊の n 番目の崩壊過程の，粒子 1 が所有する $\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}$ の値に $2/\hbar$ をかけたものを a_n としよう．このとき，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{S} = \pm\frac{1}{2}\hbar$ なら $a_n = \pm 1$ である．

ベル不等式の導出で重要なのは，これらの異なる方向に沿って 2 人の観測者によってなされる測定の間の相関である．これは，方向 $\mathbf{a}$ と bfb に対しては，

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b}) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n \tag{9.31}$$

と定義され，他の方向でも同様である．もし結果が常に完全に相関していれば，$C(\mathbf{a},\mathbf{b}) = +1$，完全に反相関すれば，$C(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -1$ である．

さて，結合

$$g_n := a_n b_n + a_n b'_n + a'_n b_n - a'_n b'_n \tag{9.32}$$

を考えてみよう．任意の n に対して，この和の各項は値 $+1$ または -1 をとる．さらに右辺の 4 番目の項は，最初の三つの項の積と等しい (なぜなら $(a_n)^2 = 1 = (b_n)^2$)．すべての可能性を調べると，g_n は値 ± 2 だけをとることがわかる．従って g_n の平均値を表す表現

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_n\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n b'_n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a'_n b_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a'_n b'_n\right| \tag{9.33}$$

の右辺は，2 以下でなければならない．さらに極限 $N \to \infty$ をとってベル

不等式がでてくる．

$$|C(\mathbf{a},\mathbf{b})+C(\mathbf{a},\mathbf{b}')+C(\mathbf{a}',\mathbf{b})-C(\mathbf{a}',\mathbf{b}')|\leq 2 \tag{9.34}$$

式 (9.34) の証明に使った仮定を明確にしておこう:

1. 各々の粒子の，任意の方向に沿うスピンの射影の値を議論できる．
2. 任意の物理量の値は，遠方の測定装置の位置を変えることによっては変わらない，という意味での局所性がある．これは，式 (9.33) の a_n が同じ値を持つこと，つまりそれらは，他の観測者が粒子 2 のスピンを測る時にどの方向 ($\mathbf{b}$ または $\mathbf{b}'$) を選ぶかに依存しない．特に，Kochen-Specker の定理のいう，文脈に依存する値ということを除外している．

さて，量子論の予測が，スピン測定の方向によっては，この不等式を破ることを示そう．軸 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に沿ったスピン測定の相関に対する量子力学の予測は，

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b}):=\left(\frac{2}{\hbar}\right)^2\langle\psi|\,\mathbf{a}\cdot\widehat{\mathbf{S}}_{(1)}\otimes\mathbf{b}\cdot\widehat{\mathbf{S}}_{(2)}\,|\psi\rangle \tag{9.35}$$

である，ここで，$\widehat{\mathbf{S}}_{(1)}$ と $\widehat{\mathbf{S}}_{(2)}$ はそれぞれ粒子 1 と 2 のスピン作用素であり，テンソル積は式 (8.30) で定義される．式 (9.29) のベクトル $|\psi\rangle$ の全角運動量が零なので，座標系の回転に対してこの量は不変である (7.1 − 7.2 節参照)．これは，$C(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ が $\cos\theta_{ab}:=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ だけの関数であることを意味する．従って $\mathbf{a}$ が z-軸に沿っていて $\mathbf{b}$ が $x-z$ 平面にあると仮定しても一般性を失わない．それで，式 (9.35) は

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b})=\langle\psi|\,\sigma_{1z}\otimes(\sigma_{2z}\cos\theta_{ab}+\sigma_{2x}\sin\theta_{ab})\,|\psi\rangle \tag{9.36}$$

になる．ここで例えば，σ_{1z} は粒子 1 の z-方向のパウリ・スピン行列である．素直に計算していけば [練習問題]

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b})=-\cos\theta_{ab} \tag{9.37}$$

がわかる．

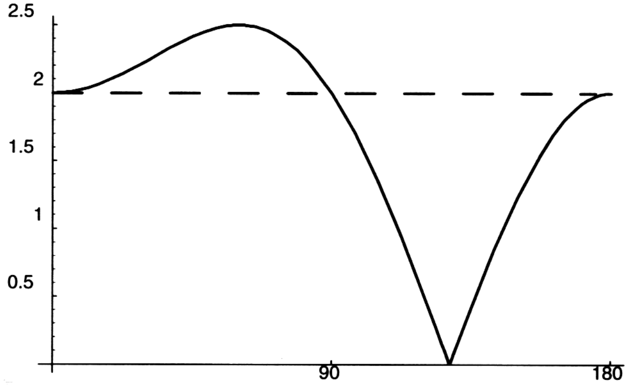


図 9.1: 関数 $|1+2\cos\phi-\cos 2\phi|$ の形.

さて，次の特別な場合を考えよう: (i) 四つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ は同一平面上にある．(ii) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行である．そして，(iii) 例えば $\theta_{ab'} = \theta_{a'b} = \phi$ とする．すると，ベル不等式は

$$|1+2\cos\phi-\cos 2\phi| \leq 2 \tag{9.38}$$

なら成立する．しかし，この関数を ϕ を変数として描いた図 9.1 から，不等式が 0^0 と 90^0 の間の ϕ 全ての値に対して**破れている**ことは明白である．

これは，量子論の予測がこの領域で実験的に有効ならば，系が観測量の個々の値を所有している，というどのような考え方も，必然的に本質的な非局所性を含まなければならないことを意味する．これは特に，完全に量子論の結果と一致する任意の隠れた変数理論にもあてはまる．このように，$2^9 5^3$ ドル問題は，

1. ベル不等式は，経験的に破れるか？
2. もしそうならば，その破れは量子論の予測と整合するか？

多くの実験がこの 20 年にわたって実行された．そのうち，最も有名なのは Alain Aspect 達の仕事で，いろいろな構成で光子の相関をチェックした

(Aspect, Graingier & Roger 1981)(Aspect, Graingier & Roger 1982*b*), (Aspect, Dalibard & Roger 1982*a*). 光子は空気中を通過するので，実験的に電子より使いやすいのである．だから特定の軸に沿った電子スピンの替わりに，光子の偏光状態を考察するのである．これらの実験は巧妙に構成され，偏光の測定をどの方向に行うかは，光子が源を去ってから決定されるようになっている．このように，存在するかもしれない光子生成と測定の，直接的因果的相関のあらゆる可能性を除外する．特に，これは検出器の設定が，崩壊過程によって発生する状態に影響を及ぼさないことを保障する．

これらの実験の詳細と完全な記述は，優れたいくつかの文献があり，興味のある読者はこれらを参照しよう (例えば，Redhead (1989)，Hughes (1989) と Peres (1993))．いずれにせよ，感動的な結論は，量子論の予測が潔白を証明されて，我々は実用論の方法または厳密な道具論的解釈を受け入れざるを得ないということである．そうでなければ，不思議な非局所性の存在を受け入れなければならないが，それは独立した実在と空間の隔たりに対する我々の通常概念となかなか整合しない．

9.4　終わりに

この本では，現代の量子論において中心となる構造上の多くの特徴を議論した．特に，数学的な理論形式の完全に首尾一貫した物理的解釈を公式化する試みに対して，最も重要な概念上の問題を議論した．従って，『概念的諸問題の解決』という章でこの本を締めくくれれば大変うれしかったが，残念なことにこれは不可能である．少なくとも本当に包括的な解決は不可能なのである．

もちろん，多くの物理学者は量子論への実用論の方法を完全に許容する．インペリアル・カレッジの物理学科において，我々は実験および理論固体物理学の最前線で活発に研究している．さらに我々は，CERN や他の国際的加速器センターでの実験プロジェクトにおいて中心的役割を担っている．このグループの同僚達は，Kochen-Specher の定理とか Bell の不

等式について気をもむことなく，非常に効果的に仕事ができる．しかしこの２０年，多くの異なる分野の物理学者は，現代量子論は十分実用になるが，それは最終的な理論形式ではない，とだんだん考えるようになってきた．状態収縮，確率概念，量子もつれと測定の役割に関する難問は依然として残り，現在の状況では『概念的諸問題の解決』には全く至らない．問題は，量子もつれの現象および，それと西洋哲学の還元論との著しい対照である．最近 20 年にわたる集中的な研究は，この問題が本当に問題であることをはっきりとさせた．しかし，これら問題の解決は，この先の課題である，そして多くの物理学者は問題解決にむけて，空間・時間と物質概念の抜本的な変革が課されるだろうと感じている．これは 21 世紀にふさわしい挑戦であり，これを提起してこの本を終えよう．

演習問題と解答

演習問題

1. $\left\{\binom{1}{0}, \binom{i}{1}\right\}$ がベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の基底であることを示し，ベクトル $\binom{2}{3}$，$\binom{3i-1}{2i+4}$ をその基底で展開すること．

2. $\mathbb{C}^2$ の通常の内積に関して，これらの基底を規格化すること．それらは正規直交するか？

3. $\psi(x) = e^{-3x^2}$ とする．$\vec{\psi}$ に対して，波動関数の空間の標準的な内積を使って「長さ」（つまりノルム）を求める．e^{2ix} の長さは有限か？
$\phi(x) := xe^{-x^2}$ とする．$\langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle$ はどうなるか？
(NB. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.)

4. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N\}$ を，内積を持つ複素ベクトル空間 V の基底であるとする．もし $\vec{\psi} \in V$ が，すべての $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して $\langle\vec{e}_i, \vec{\psi}\rangle = 0$ なら，$\vec{\psi} = 0$ である．

5. $N \times N$ 複素行列の空間 $M(N, \mathbb{C})$ 上で，スカラー積が

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}\,(A^\dagger B)$$

によって定義できる．ここで，$A, B \in M(N, \mathbb{C})$ である．

6. 任意の線形作用素 $\widehat{A}$ が，スカラー積を持ったベクトル空間 V 上で行列要素から，次の意味で一意的に決まる．つまり，任意の作用素 $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ が，すべての $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in V$ に対して $\langle \vec{\psi}, \widehat{A}\vec{\phi} \rangle = \langle \vec{\psi}, \widehat{B}\vec{\phi} \rangle$ を満たすなら，$\widehat{A} = \widehat{B}$ となる．

7. 作用素 $\widehat{A}$ の，基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N\}$ に関する行列表現の要素は $A_{ij} = \langle \vec{e}_i, \widehat{A}\vec{e}_j \rangle$ となる．ここで，$i, j = 1, 2, \ldots, N$.

8. 任意の作用素 $\widehat{A}, \widehat{B}$ の共役は $(\widehat{A}\widehat{B})^\dagger = \widehat{B}^\dagger \widehat{A}^\dagger$ を満たす．

9. 量子論で重要な Pauli 行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は式 (1.23) で定義される．それらは $\mathbb{C}^2$ 上の自己共役作用素である．固有値と固有ベクトルを求めること．σ_x，σ_y，σ_z それぞれについて，異なる固有値に対応する固有ベクトルが直交する．

10. $\mathbb{C}^2$ 上の最も一般な自己共役作用素は何か？それを Pauli 行列と 2×2 単位行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ で書くこと．

11. 行列作用素 $\widehat{M} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の固有ベクトルと固有値は何か？

(i) $\widehat{M}$ の固有ベクトルは $\mathbb{C}^2$ の基底をなすか？

(ii) $\widehat{M}$ は自己共役作用素か？

12. 行列作用素

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有ベクトルをベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ 上で計算すること．

この作用素の固有ベクトルから正規直交基底を構成すること．

13. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の単位作用素でない作用素 $\widehat{P}$ が $\widehat{P} = \widehat{P}^\dagger$ 及び $\widehat{P} = \widehat{P}^2$ を満たすとする．

(i) $\widehat{P}$ の固有値は 0 及び 1 である．

(ii) $\widehat{P}$ が射影作用素であること．それが射影する，$\mathcal{H}$ の部分空間 W を見出すこと．

(iii) どのような $|\phi\rangle$ に対して作用素 $|\phi\rangle\langle\phi|$ が射影作用素になるか？

14. 密度行列 $\widehat{\rho_1}$ 及び $\widehat{\rho_2}$ に対して，r を $0 \leq r \leq 1$ を満たす任意の実数とすると，$r\widehat{\rho_1} + (1-r)\widehat{\rho_2}$ もまた密度行列になる．

15. 密度行列 $\widehat{\rho}$ は $\widehat{\rho}^2 = \widehat{\rho}$ を満たすときに限りベクトル状態 (つまり ある $|\psi\rangle$ を使って $|\psi\rangle\langle\psi|$ と書ける) である．

16. 自己共役作用素 $\widehat{A}$ 及び $\widehat{B}$ は，それぞれ離散固有値 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{M_A}\}$ 及び $\{b_1, b_2, \ldots, b_{M_B}\}$，それからそれぞれスペクトル表現 $\widehat{A} = \sum_{i=1}^{M_A} a_i \widehat{P}_i$ 及び $\widehat{B} = \sum_{j=1}^{M_B} b_j \widehat{Q}_j$ を持つとしよう．

(i) $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ であれば，任意の $i = 1, 2, \ldots, M_A$ に対して $[\widehat{P}_i, \widehat{B}] = 0$.

(ii) 従って，$[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ であれば，任意の $i = 1, 2, \ldots, M_A$ 及び $j = 1, 2, \ldots, M_B$ に対して $[\widehat{P}_i, \widehat{Q}_j] = 0$.

17. 量子論の時間発展によって状態ベクトルの長さは不変である．

観測量 A の期待値 $\langle A \rangle_{\psi_t}$ は微分方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi_t} = \langle \vec{\psi}_t, [\widehat{A}, \widehat{H}] \vec{\psi}_t \rangle$$

に従って時間発展する．ここで，$\widehat{H}$ はハミルトニアン作用素であり，状態は規格化されているとする．

18. 射影作用素 $\widehat{P}$ 及びユニタリー作用素 $\widehat{U}$ に対して，$\widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1}$ はまた射影作用素である．

19. ρ メソンのスピン自由度はベクトル空間 $\mathbf{C}^3$ の上で行列作用素

$$\widehat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \widehat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ \widehat{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

によって表現される．交換子 $[\widehat{S}_x, \widehat{S}_y]$ を計算して，実際の計算で，状態

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$$

における不確定性の積が，一般化された不確定性関係を満たすことを確認すること．

20. 調和振動子 (簡単のために，質量と角振動数を 1 とする) の消滅生成作用素は

$$\widehat{a} := (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(\widehat{x} + i\widehat{p}), \quad \widehat{a}^\dagger := (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(\widehat{x} - i\widehat{p}),$$

で定義され，規格化されたエネルギー固有状態 $|n\rangle$，$n = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\widehat{a}\,|n\rangle = n^{\frac{1}{2}}\,|n-1\rangle, \quad \widehat{a}^\dagger\,|n\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}}\,|n+1\rangle$$

及び $a\,|0\rangle = 0$ のように作用する．

この結果から，これら固有状態において，観測量 x 及び p の期待値が零となり，不確定性は，$(\triangle_{|n\rangle}x)(\triangle_{|n\rangle}p) = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$ となること．

21. 電子のスピン状態はベクトル空間 $\mathbf{C}^2$ の要素で表現される．ここで興味のあるスピン角運動量の 3 成分 S_x，S_y，S_z は行列作用素

$$\widehat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad \widehat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad \widehat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

で表現される．ここで，σ_x，σ_y，σ_z は式 (1.23) で与えられる Pauli スピン行列である．

(i) ベクトル $|\psi\rangle = \binom{1}{0}$ で表される状態の系が複数用意されたとしよう．S_x の測定結果が (a) $\frac{\hbar}{2}$; (b) $-\frac{\hbar}{2}$ となる確率は何か？

(ii) S_x でなく S_y の測定に対してはどうか？

(iii) S_y の（理想）測定により $\frac{\hbar}{2}$ を与えた系が複数選択されたとしよう．これらに，引き続き S_z を測定したとき，結果 $\frac{\hbar}{2}$ を得る確率はいくらか．

22. (a) 電子スピンのペアに対して以下のベクトルを計算すること．

$$\text{(i)} \quad \widehat{S}_x \otimes \widehat{S}_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)} \quad \widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{S}_z \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{(iii)} \quad \widehat{S}_x^{\text{tot}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$\widehat{S}_x^{\text{tot}}$ は x 方向の全スピン作用素で，$\widehat{S}_x^{\text{tot}} := \widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{S}_x + \widehat{S}_x \otimes \widehat{\mathbb{1}}$ により定義される．$\binom{a}{b}\binom{c}{d}$ は $\binom{a}{b} \otimes \binom{c}{d}$ のことである．

(b) 以下の量を評価すること

$$\text{(i)} \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\text{(ii)} \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\|$$

$$\text{(iii)} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ベクトル $\binom{1}{0}\binom{i}{2} + \binom{1}{1}\binom{1}{i}$ を規格化すること．

(c) スピン $\frac{1}{2}$ 粒子のペアの集合に対する状態が $\binom{1}{0}\binom{i}{2} + \binom{1}{1}\binom{1}{i}$ であるとき，S_z^{tot} の測定で値 (i) $\hbar$, (ii) $-\hbar$, を得る確率．

解答

1. もし $\binom{1}{0}$ 及び $\binom{i}{1}$ が線形従属なら，$\binom{1}{0} = \mu\binom{i}{1}$ となる複素数 μ がある．つまり $1 = \mu i$ 及び $0 = \mu$ であるが，明らかにこれは不可能．従って 2 つのベクトルは線形独立であり，2 次元ベクトル空間 $\mathbf{C}^2$ の基底となる．

(i)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

とすると，$2 = \alpha + i\beta$ 及び $3 = \beta$ だから $\alpha = 2 - 3i$．従って求めていた展開は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 - 3i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 3i - 1 \\ 2i + 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

とすると，$3i - 1 = \alpha + i\beta$ 及び $2i + 4 = \beta$ だから $\alpha = 1 - i$．従って求めていた展開は

$$\begin{pmatrix} 3i - 1 \\ 2i + 4 \end{pmatrix} = (1 - i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2i + 4) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. ノルムは

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = (1,\, 0)^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

なのですでに規格化されている．一方，

$$\left\| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (i,\, 1)^* \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i,\, 1) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

なので，規格化されたベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{i}{1}$.（位相因子は不定であることに注意しよう．）

ベクトルの内積は

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,\,0)^* \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

なので，これらベクトルは正規直交では**ない**.

3. (i) $\psi(x) = e^{-3x^2}$ に対して

$$\|\psi\|^2 = \langle\vec{\psi}, \vec{\psi}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-6x^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

なので，ψ の長さは

$$\|\psi\| = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(ii) $\phi(x) = e^{2ix}$ に対して

$$\|\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{2ix}\right)^* e^{2ix}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1\,dx = \infty$$

なので，$\vec{\phi}$ の長さは**発散する**.

(iii) $\phi(x) = xe^{-x^2}$ に対しては

$$\langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-3x^2}\right)^* x\,e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-4x^2}\,dx.$$

は，xe^{-4x^2} が x に関して奇関数なので，零である．従って

$$\langle\vec{\psi}, \vec{\phi}\rangle = 0.$$

4. 任意のベクトル $\vec{\phi} \in V$ は，$\vec{\phi} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \vec{e}_i$ の形に展開され，複素系数 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ は一意的である．従ってもし，すべての $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して $\langle\vec{e}_i, \vec{\psi}\rangle = 0$ なら

$$\langle\vec{\phi}, \vec{\psi}\rangle = \langle\sum_{i=1}^{N} \phi_i \vec{e}_i, \vec{\psi}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \phi_i^* \langle\vec{e}_i, \vec{\psi}\rangle = 0$$

が任意の $\vec{\phi} \in V$ に対して言える．(ベクトル空間が無限次元のとき，極限操作 $N \mapsto \infty$ とスカラー積をとる操作は交換しない．) これが任意の $\vec{\phi} \in V$ に対して言えるので特に $\vec{\phi} = \vec{\psi}$ ととれば，$\langle \vec{\psi}, \vec{\psi} \rangle = 0$ となり $\vec{\psi} = 0$ が言えた．

5. $M(N, \mathbb{C})$ のベクトル空間としての構造は，行列の和とスカラー量との積を定義して決定する．正確に言うと，$A, B \in M(N, \mathbb{C})$ 及び $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$A + B$ 及び λA を

$$(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij} \tag{A.1}$$

及び

$$(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij} \tag{A.2}$$

で定義する．ここで，$i, j = 1, 2, \ldots, N$ である．$\mathrm{tr}\,(A^\dagger B)$ がスカラー積であることを示すために，$\mathrm{tr}\,A := \sum_{i=1}^{N} A_{ii}$ 及び $(A^\dagger)_{ij} = (A_{ji})^*$ に注意しよう． すると，

$$\mathrm{tr}\,(A^\dagger B) = \sum_{i,j=1}^{N} (A_{ji})^* \, B_{ji}$$

となり，スカラー積となるための 3 条件は以下のように示される．

- 式 (A.1–A.2) から，もし $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ なら
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\{A^\dagger(\alpha B + \beta C)\} &= \sum_{i,j=1}^{N} (A_{ji})^*(\alpha B_{ji} + \beta C_{ji}) \\ &= \alpha\,\mathrm{tr}\,(A^\dagger B) + \beta\,\mathrm{tr}\,(A^\dagger C)\end{aligned}$$
なので，$\langle A, (\alpha B + \beta C)\rangle = \alpha\langle A, B\rangle + \beta\langle A, C\rangle$ となる．

- $\big(\mathrm{tr}\,(A^\dagger B)\big)^* = \big(\sum_{i,j=1}^{N} (A_{ji})^* B_{ji}\big)^* = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ji}\,(B_{ji})^*$ $= \mathrm{tr}\,(B^\dagger A)$ なので，$\langle A, B\rangle^* = \langle B, A\rangle$ となる．

- 最後に，$\mathrm{tr}\,(A^\dagger A) = \sum_{i,j=1}^{N} (A_{ji})^* \, A_{ji} = \sum_{i,j=1}^{N} |A_{ji}|^2$．この和の各項は零以上なので，$\langle A, A\rangle \geq 0$ であり，$\langle A, A\rangle = 0$ となるのは $A_{ji} = 0$（すべての $i, j = 1, 2 \ldots, N$）に限る．

6. $\langle\vec{\psi},\widehat{A}\vec{\phi}\rangle = \langle\vec{\psi},\widehat{B}\vec{\phi}\rangle$ が任意の $\vec{\psi},\vec{\phi}\in V$ について成立するとしよう．すると特に，任意の $\vec{\phi}\in V$ 及びベクトル空間 V の基底の全成分 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_N\}$ に対して，$\langle\vec{e}_i,\widehat{A}\vec{\phi}\rangle = \langle\vec{e}_i,\widehat{B}\vec{\phi}\rangle$．演習問題 4 によると，これは，任意の $\vec{\phi}\in V$ に対して $\widehat{A}\vec{\phi}=\widehat{B}\vec{\phi}$ であること，つまり $\widehat{A}=\widehat{B}$ であることを示す．

7. 作用素 $\widehat{A}$ の，基底 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_N\}$ に対する行列要素 A_{ij} は，

$$\widehat{A}\vec{e}_j=\sum_{k=1}^{N}\vec{e}_k\,A_{kj}$$

によって決まる．正規直交基底であれば，この式の両辺にベクトル $\vec{e}_i$ をかければ

$$\langle\vec{e}_i,\widehat{A}\vec{e}_j\rangle=\langle\vec{e}_i,\sum_{k=1}^{N}\vec{e}_k\,A_{kj}\rangle=\sum_{k=1}^{N}\langle\vec{e}_i,\vec{e}_k\,A_{kj}\rangle=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\langle\vec{e}_i,\vec{e}_k\rangle A_{kj}=\sum_{k=1}^{N}\delta_{ik}\,A_{kj}=A_{ij}$$

を得る．ここで，正規直交基底の性質 $\langle\vec{e}_i,\vec{e}_k\rangle=\delta_{ik}$ を用いた．

8. $\vec{\psi},\vec{\phi}$ を，ベクトル空間 V の任意のベクトルとしよう．すると，共役の定義から

$$\langle\vec{\psi},(\widehat{A}\widehat{B})^\dagger\vec{\phi}\rangle=\langle\widehat{A}\widehat{B}\vec{\psi},\vec{\phi}\rangle=\langle\widehat{B}\vec{\psi},\widehat{A}^\dagger\vec{\phi}\rangle=\langle\vec{\psi},\widehat{B}^\dagger\widehat{A}^\dagger\vec{\phi}\rangle.$$

となる．これが任意の $\vec{\psi},\vec{\phi}\in V$ について成立するので，演習問題 6 の結果から $(\widehat{A}\widehat{B})^\dagger=\widehat{B}^\dagger\widehat{A}^\dagger$ となる．

9. $\mathbf{C}^2$ 上の自己共役作用素は単に 2×2 エルミート行列である．つまり，$A_{ij}=A^*_{ji}$，$i,j=1,2$．他言すれば，もし

$$\widehat{A}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\ \text{従って}\ \widehat{A}^\dagger=\begin{pmatrix}\alpha^* & \gamma^*\\ \beta^* & \delta^*\end{pmatrix}$$

であり，$\widehat{A}$ が自己共役なら $\widehat{A}=\widehat{A}^\dagger$ である．明らかに σ_x，σ_y，σ_z はすべてこの条件を満たす．

σ_x の固有値 λ は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

の解である．この式から $\det\left(\begin{smallmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right) = 0$ でなければならないが，これは $\lambda^2 = 1$ となる．従って，固有値は $\lambda = \pm 1$.

$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ は，$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ を満たす．つまり，$a = b$. 従って固有ベクトルは，a を任意の複素数として，$a\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ の形になることがわかる．規格化すると $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

同様に，$\lambda = -1$ に対する規格化された固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ であり，これらは

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\,(1,\,1)^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

となる．

同様に σ_y に対する固有値も $\lambda = \pm 1$ であり，固有ベクトルは $a\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ 及び $b\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ の形である．規格化したものは $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ 及び $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であり，

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\,(1,\,-i) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

を満たす．

σ_z は対角行列なので，固有値は単に対角要素 1 及び -1 である．対応する固有ベクトルは，$a\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ 及び $b\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であり，規格化したもの $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ 及び $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ は当然

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = (1,\,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

となる．

10. 上に示したとおり，2×2 エルミート行列 $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ は $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\alpha^* & \gamma^*\\ \beta^* & \delta^*\end{smallmatrix}\right)$ を満たす．従って，最も一般の自己共役 2×2 作用素は

$$\begin{pmatrix} r_1 & a \\ a^* & r_2 \end{pmatrix}$$

の形になる．ここで，a は複素数，r_1 及び r_2 は実数である．これを，

$$\begin{pmatrix} r_1 & a \\ a^* & r_2 \end{pmatrix} = \frac{(r_1+r_2)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(r_1-r_2)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ + \Re a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \Im a \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

のように書くことができる．ここで，$\Re a$ 及び $\Im a$ はそれぞれ，複素数 a の実部と虚部であり，$a = \Re a + i\Im a$．従って，

$$\begin{pmatrix} r_1 & a \\ a^* & r_2 \end{pmatrix} = \frac{(r_1+r_2)}{2}\mathbb{1} + \frac{(r_1-r_2)}{2}\sigma_z + \Re a\,\sigma_x - \Im a\,\sigma_y.$$

11. (i) $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right) = \lambda\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)$ としよう．すると，$\det\left(\begin{smallmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{smallmatrix}\right) = 0$ なので $\lambda^2 = 0$．従って，唯一の固有値は 0 である．これは 2 重に縮退しているように思えるが，実際は $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right) = 0$ から $b = 0$ となり，一般の固有ベクトルは $a\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ の形になる．つまり，固有ベクトルは基底を**張らない**．

(ii) 行列 $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ は $\left(\begin{smallmatrix}r_1 & a\\ a^* & r_2\end{smallmatrix}\right)$ の形でないのでエルミートでない．従って展開定理には抵触しない．

12. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は代数方程式

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

の根である．この式は $(1-\lambda)^2(2-\lambda)-(2-\lambda)=0$ つまり $\lambda(\lambda-2)(2-\lambda)=0$．固有値は 0 及び 2 だが，後者は 2 重根である．$\lambda=0$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0$$

から $a+c=0$ 及び $2b=0$ を得る．従って，固有ベクトルは $a\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ の形であり，規格化すれば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

$\lambda=2$ に対しての固有ベクトルの方程式は

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

であり，これから $a+c=2a$ であるが，b は不定である．従って固有ベクトルは $\begin{pmatrix}a\\ b\\ a\end{pmatrix}$ の形．そして任意の $\begin{pmatrix}a\\ b\\ a\end{pmatrix}$ 及び $\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ a'\end{pmatrix}$ は，もし

$$(a^*, b^*, a^*)\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ a'\end{pmatrix}=0$$

なら直交する．つまり $2a^*a'+b^*b'=0$．これを満たす線形独立な規格化されたベクトルは，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\ \text{および}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

このように固有値 $\lambda = 2$ は 2 重に縮退している．そして上で構成した 3 つのベクトルは $\mathbb{C}^3$ の基底をなす．

13. (i) $\widehat{P}\vec{u} = \mu\vec{u}$，つまり μ が $\widehat{P}$ の固有値であり $\vec{u}$ が固有ベクトルであるとしよう．すると，

$$\mu\vec{u} = \widehat{P}\vec{u} = \widehat{P}^2\vec{u} = \widehat{P}(\widehat{P}\vec{u}) = \widehat{P}(\mu\vec{u}) = \mu^2\vec{u}$$

であり，$\vec{u} \neq 0$ なので $\mu - \mu^2 = 0$，つまり $\mu(1-\mu) = 0$．$\widehat{P}$ の可能な固有値は $\mu = 1$ 及び $\mu = 0$ である．

もし $P \neq \widehat{\mathbb{1}}$ なら両方が実際固有値である．と言うのは，もし $\vec{\psi}$ が $\widehat{P}\vec{\psi} \neq 0$ である任意のベクトルなら (少なくとも 1 つある．そうでなければ $\widehat{P}$ は零ベクトルになってしまうから)，$\widehat{P}(\widehat{P}\vec{\psi}) = \widehat{P}^2\vec{\psi} = \widehat{P}\vec{\psi}$ であり，$\widehat{P}\vec{\psi}$ は $\widehat{P}$ の固有値 $\mu = 1$ に対応する固有ベクトルである．

任意の $\vec{\psi}$ を $\widehat{P}\vec{\psi} \neq \vec{\psi}$ を満たすようにとろう (少なくとも 1 つある．そうでなければ $\widehat{P}$ は単位ベクトルになってしまうから)．すると，$\widehat{P}(\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P})\vec{\psi} = (\widehat{P} - \widehat{P}^2)\vec{\psi} = 0$ となり，零でないベクトル $(\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P})\vec{\psi}$ は $\widehat{P}$ の固有値 0 の固有ベクトルになる．従って $\widehat{P}$ の固有値は 0 及び 1 である．

(ii) 部分空間を $W := \{\vec{\psi} \in \mathcal{H} | \widehat{P}\vec{\psi} = \vec{\psi}\}$ つまり，$\widehat{P}$ の固有値 1 のすべての固有ベクトルであるとしよう．任意のベクトル $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ は常に

$$\vec{\psi} \equiv \widehat{P}\vec{\psi} + (\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P})\vec{\psi} \tag{A.3}$$

と書け，$\widehat{P}^2 = \widehat{P}$ なので $\widehat{P}\vec{\psi}$ は W に属する．さらに $\widehat{P}$ が自己共役なので任意の $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \widehat{P}\vec{\psi}, (\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P})\vec{\phi} \rangle = \langle (\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P})\widehat{P}\vec{\psi}, \vec{\phi} \rangle = 0$$

となる．ここで，$(\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P})\widehat{P} = \widehat{P} - \widehat{P}^2 = \widehat{P} - \widehat{P} = 0$ を用いた．このように式 (A.3) はベクトル $\vec{\psi}$ を，W に属する $\widehat{P}\vec{\psi}$，及び W と直交する $W^\perp$ に属する $(\widehat{\mathbb{1}} - \widehat{P})\vec{\psi}$ へと分解する．さらに，与えられた部分空間 W に対して，任意のベクトルの $\vec{\psi}_W \in W$ 及び $\vec{\psi}_{W^\perp} \in W^\perp$ への分解 $\vec{\psi} = \vec{\psi}_W + \vec{\psi}_{W^\perp}$

は一意的であることを示すのは容易である．従って式 (A.3) も一意的な分解であり，任意のベクトル $\vec{\psi}$ に対して $\vec{\psi}_W = P\vec{\psi}$ である．このように $\widehat{P}$ は部分空間 W の上へ射影する作用素である．従って $\widehat{P}$ は実際に射影作用素である．

(iii) 一般の作用素 $|\psi\rangle\langle\phi|$ の共役は $|\phi\rangle\langle\psi|$ なので，任意のベクトル $|\phi\rangle$ に対して $|\phi\rangle\langle\phi|$ 自己共役である．さらに，$(\,|\phi\rangle\langle\phi|\,)^2 = (\langle\phi|\phi\rangle)\,|\phi\rangle\langle\phi|$ なので，$|\phi\rangle$ が規格化され $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ であるときに限って $(\,|\phi\rangle\langle\phi|\,)^2 = |\phi\rangle\langle\phi|$ となる．従ってこれが，$|\phi\rangle\langle\phi|$ が射影作用素である条件である．

14. $\widehat{\rho} := r\widehat{\rho_1} + (1-r)\widehat{\rho_2}$ としよう．ここで $r \in \mathbb{R}$ は $0 \le r \le 1$ を満たすとしよう．$\widehat{\rho}$ が密度行列であるために次の 3 条件を満たさなければならない．

- $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}^\dagger$,
- $\widehat{\rho}$ は半正定値の作用素，
- $\mathrm{tr}\,\widehat{\rho} = 1$.

$\widehat{\rho_1}$ 及び $\widehat{\rho_2}$ が自己共役なので，任意の実数 r に対して，$(r\widehat{\rho_1} + (1-r)\widehat{\rho_2})^\dagger = r\widehat{\rho_1}^\dagger + (1-r)\widehat{\rho_2}^\dagger = r\widehat{\rho_1} + (1-r)\widehat{\rho_2}$ である．

第 2 の条件を吟味するために，$|\psi\rangle$ をヒルベルト空間の零でない任意のベクトルとする．$\widehat{\rho_1}$ 及び $\widehat{\rho_2}$ は半正定値作用素なので，$\langle\psi|\,\widehat{\rho_1}\,|\psi\rangle \ge 0$ 及び $\langle\psi|\,\widehat{\rho_2}\,|\psi\rangle \ge 0$. 更にもし $0 \le r \le 1$ なら $0 \le (1-r) \le 1$. 従って，

$$\langle\psi|\,\widehat{\rho}\,|\psi\rangle = r\langle\psi|\,\widehat{\rho_1}\,|\psi\rangle + (1-r)\langle\psi|\,\widehat{\rho_2}\,|\psi\rangle$$

は，≥ 0 である数の和である．従って，和自身も ≥ 0 である．

第 3 の条件を吟味するために，トレースは線形の操作であることを用いる．

$$\mathrm{tr}\,(r\widehat{\rho_1} + (1-r)\widehat{\rho_2}) = r\,\mathrm{tr}\,\widehat{\rho_1} + (1-r)\mathrm{tr}\,\widehat{\rho_2} = (1-r) + r = 1$$

ここで，2つの密度行列に対する条件 $\mathrm{tr}\,\widehat{\rho_1} = 1 = \mathrm{tr}\,\widehat{\rho_2}$ を用いた．

15. 初めに，$\widehat{\rho}$ はベクトル空間を表現すると仮定する．つまりある規格化された状態 $|\psi\rangle$ に対して $\widehat{\rho} = \widehat{P}_{|\psi\rangle} := |\psi\rangle\langle\psi|$．すると $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ を用いて

$$(\widehat{\rho})^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\ |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \widehat{\rho}.$$

逆に，密度行列 $\widehat{\rho}$ が $(\widehat{\rho})^2 = \widehat{\rho}$ を満たすとしよう．我々は，ある規格化された状態の組 $\{\,|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_D\rangle\}$ 及び実数 $\{w_1, w_2, \ldots, w_D\}$ で $d = 1, 2, \ldots, D$ に対して $0 < w_d \leq 1$ を満たすものに関して，$\widehat{\rho}$ は $\widehat{\rho} = \sum_{d=1}^{D} w_d\, \widehat{P}_{|\psi_d\rangle}$ と展開されることを知っている．さて，状態の組 $\{\,|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_D\rangle\}$ は正規直交しているので $\widehat{P}_{|\psi_c\rangle}\, \widehat{P}_{|\psi_d\rangle} = \delta_{cd}\widehat{P}_{|\psi_d\rangle}$ であるから，

$$(\widehat{\rho})^2 = \sum_{c=1}^{D}\sum_{d=1}^{D} w_c w_d\, \widehat{P}_{|\psi_c\rangle}\widehat{P}_{|\psi_d\rangle} = \sum_{d=1}^{D}(w_d)^2\widehat{P}_{|\psi_d\rangle}.$$

ここで，$(\widehat{\rho})^2 = \widehat{\rho}$ であるから，この表現は $\sum_{d=1}^{D} w_d\widehat{P}_{|\psi_d\rangle}$ と等しい．従って，

$$\sum_{d=1}^{D}(w_d)^2\widehat{P}_{|\psi_d\rangle} = \sum_{d=1}^{D} w_d\, \widehat{P}_{|\psi_d\rangle},$$

であり，これに両辺左から $c = 1, 2, \ldots, D$ の $\widehat{P}_{|\psi_c\rangle}$ をかけて $\widehat{P}_{|\psi_c\rangle}\, \widehat{P}_{|\psi_d\rangle} = \delta_{cd}\widehat{P}_{\psi_d}$ を用いれば，すべての $c = 1, 2, \ldots D$ に対して $\big((w_c)^2 - w_c\big)\widehat{P}_{|\psi_c\rangle} = 0$ となることがわかる．これはすべての c に対して $w_c^2 = w_c$ となることを示す．この式の解は $w_c = 1$ あるいは $w_c = 0$ であるが，$w_c > 0$ であるので $w_c = 1$ と確定する．しかし $\sum_{d=1}^{D} w_d = 1$ なので $D = 1$．従ってあるベクトル $|\psi\rangle$ に対して $\widehat{\rho} = \widehat{P}_{|\psi\rangle}$ となり，これは $\widehat{\rho}$ がベクトル状態を表現することを意味する．

16. (i) $\widehat{A} = \sum_{i=1}^{M_A} a_i\widehat{P}_i$ 及び $\widehat{B} = \sum_{j=1}^{M_B} b_j\widehat{Q}_j$ に対して $[\,\widehat{A}, \widehat{B}\,] = 0$ である．ここで任意の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ と $i = 1, 2, \ldots, M_A$ に対して，$\widehat{A}(\widehat{B}\widehat{P}_i\vec{\psi}) =$

$\widehat{B}\widehat{A}\widehat{P}_i\vec{\psi} = a_i(\widehat{B}\widehat{P}_i\vec{\psi})$ ($\widehat{A}\widehat{P}_i = a_i\widehat{P}_i$ だから) なので，$\widehat{B}\widehat{P}_i\vec{\psi}$ は，$\widehat{A}$ の固有値 a_i に対する固有空間に属する．従って

$$\widehat{P}_i\widehat{B}\widehat{P}_i\vec{\psi} = \widehat{B}\widehat{P}_i\vec{\psi} \tag{A.4}$$

であり，任意の $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ に対してそうなので

$$\widehat{P}_i\widehat{B}\widehat{P}_i = \widehat{B}\widehat{P}_i. \tag{A.5}$$

となる．この共役を取った $\widehat{P}_i\widehat{B}\widehat{P}_i = \widehat{P}_i\widehat{B}$ と元の式の差を取ると $\widehat{B}\widehat{P}_i = \widehat{P}_i\widehat{B}$ となる．

(ii) $[\widehat{B}, \widehat{P}_i] = 0$ から始めて，$\widehat{B}$ のスペクトル射影作用素 $\widehat{Q}_j$ に同様の議論を適用すれば $[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_i] = 0$ を得る．

17. $\vec{\psi}_t$ の長さの 2 乗は $\|\psi_t\|^2$ であり，ベクトル自身が時間に依存したシュレーディンガー方程式 $i\hbar\frac{d}{dt}\vec{\psi}_t = \widehat{H}\vec{\psi}_t$ を満たす．ここで $\widehat{H}$ はハミルトニアン作用素である．従って

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\psi_t\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle\vec{\psi}_t, \vec{\psi}_t\rangle = \langle\frac{d}{dt}\vec{\psi}_t, \vec{\psi}_t\rangle + \langle\vec{\psi}_t, \frac{d}{dt}\vec{\psi}_t\rangle \\ &= \langle -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\vec{\psi}_t, \vec{\psi}_t\rangle + \langle\vec{\psi}_t, -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\vec{\psi}_t\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\Big(\langle\widehat{H}\vec{\psi}_t, \vec{\psi}_t\rangle - \langle\vec{\psi}_t, \widehat{H}\vec{\psi}_t\rangle\Big) = 0\end{aligned}$$

となる．ここで最後の等式は $\widehat{H}$ が自己共役であることから出る．このように $\vec{\psi}_t$ の長さは定数である．

あるいは，$\vec{\psi}_t = e^{-it\widehat{H}/\hbar}\vec{\psi}_0$ 及び $e^{-it\widehat{H}/\hbar}$ がユニタリー作用素であることから同じ結果がすぐ出る．

期待値に対する証明も上と同様の議論が成り立つ．上の議論から，状態が時刻 $t = 0$ で規格化されていれば後の任意の時刻でもそうであるから，$\langle A\rangle_{\psi_t} = \langle\vec{\psi}_t, \widehat{A}\vec{\psi}_t\rangle$ である．従って

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi_t} = i\hbar\left(\langle\frac{d}{dt}\vec{\psi}_t, \widehat{A}\vec{\psi}_t\rangle + \langle\vec{\psi}_t, \widehat{A}\frac{d}{dt}\vec{\psi}_t\rangle\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle -\widehat{H}\vec{\psi}_t, \widehat{A}\vec{\psi}_t\rangle + \langle \vec{\psi}_t, \widehat{A}\widehat{H}\vec{\psi}_t\rangle \\
&= -\langle \vec{\psi}_t, \widehat{H}\widehat{A}\vec{\psi}_t\rangle + \langle \vec{\psi}_t, \widehat{A}\widehat{H}\vec{\psi}_t\rangle \\
&= \langle \vec{\psi}_t, [\,\widehat{A}, \widehat{H}\,]\vec{\psi}_t\rangle,
\end{aligned}
$$

となる.

18. 作用素 $\widehat{P}$ は $\widehat{P} = \widehat{P}^\dagger$ 及び $(\widehat{P})^2 = \widehat{P}$ を満たす場合に限り射影作用素である．$\widehat{Q} := \widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1}$ とすると，$\widehat{U}$ はユニタリーなので $\widehat{U}^{-1} = \widehat{U}^\dagger$ であり $\widehat{Q} = \widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^\dagger$ となる．更に，一般に $(\widehat{A}\widehat{B})^\dagger = \widehat{B}^\dagger\widehat{A}^\dagger$ なので

$$
\widehat{Q}^\dagger = (\widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^\dagger)^\dagger = (\widehat{U}^\dagger)^\dagger\widehat{P}^\dagger\widehat{U}^\dagger = \widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^\dagger
$$

となる．ここで，任意の作用の $\widehat{A}$ について成立する恒等式 $\widehat{A} = (\widehat{A}^\dagger)^\dagger$ を用いた．従って $\widehat{Q} = \widehat{Q}^\dagger$，つまり $\widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1}$ は自己共役である.

さらに

$$
(\widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1})^2 = \widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1}\,\widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1} = \widehat{U}\widehat{P}^2\widehat{U}^{-1} = \widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1},
$$

なので $\widehat{U}\widehat{P}\widehat{U}^{-1}$ は実際射影演算子となる.

19. $\widehat{S}_x\widehat{S}_y - \widehat{S}_y\widehat{S}_x$ を直接計算しよう.

$$
\widehat{S}_x\widehat{S}_y = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix}
$$

及び

$$
\widehat{S}_y\widehat{S}_x = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}
$$

となるから

$$
[\,\widehat{S}_x, \widehat{S}_y\,] = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} = i\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i\hbar\widehat{S}_z
$$

となる．一般化された不確定性関係は

$$\triangle_\psi S_x \, \triangle_\psi S_y \;\geq\; \frac{1}{2}|\langle\psi|\,[\,\widehat{S}_x, \widehat{S}_y\,]\,|\psi\rangle| = \frac{\hbar}{2}|\langle\psi|\,\widehat{S}_z\,|\psi\rangle|$$

及び $(\triangle_\psi S_x)^2 = \langle S_x^2\rangle_\psi - \langle S_x\rangle_\psi^2$．従って，初めのステップは $\langle S_x\rangle_\psi$ を規格化された状態

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$$

について計算することである．これは

$$\begin{aligned} \langle S_x\rangle_\psi = \langle\psi|\,\widehat{S}_x\,|\psi\rangle &= \frac{\hbar}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1, & -i, & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1, & -i, & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

なので $(\triangle_\psi S_x)^2 = \langle S_x^2\rangle_\psi$．また

$$\widehat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} \langle S_x^2\rangle_\psi &= \frac{\hbar^2}{12} \begin{pmatrix}1, & -i, & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar^2}{12} \begin{pmatrix}1, & -i, & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned}$$

となるので

$$\triangle_\psi S_x = \frac{\hbar}{2}.$$

$(\triangle_\psi S_y)^2 = \langle S_y^2\rangle_\psi - \langle S_y\rangle_\psi^2$ の計算．

$$\langle S_y\rangle_\psi = \langle\psi|\,\widehat{S}_x\,|\psi\rangle \;=\; \frac{\hbar}{6\sqrt{2}}\,(1,\,-i,\,-2)\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{6\sqrt{2}}\,(1,\,-i,\,-2)\begin{pmatrix}1\\ 3i\\ -1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

及び

$$\widehat{S}_y^2 = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

から，

$$\langle S_y^2\rangle_\psi \;=\; \frac{\hbar^2}{12}\,(1,\,-i,\,-2)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar^2}{12}\,(1,\,-i,\,-2)\begin{pmatrix}3\\ 2i\\ -3\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{12}11$$

がわかる．従って

$$(\triangle_\psi S_y)^2 = \frac{11}{12}\hbar^2 - \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{12}\hbar^2$$

なので

$$\triangle_\psi S_y = \hbar\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

従って不確定性関係の左辺は $\triangle_\psi S_x\,\triangle_\psi S_y = \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{2}} = \hbar^2\left(\frac{5}{48}\right)^{\frac{1}{2}}$ となる．一方右辺は

$$\frac{\hbar}{2}|\langle\psi|\,\widehat{S}_z\,|\psi\rangle| \;=\; \frac{\hbar}{12}\left|(1,\,-i\,-2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \quad \frac{\hbar}{12}\left| (1,\ -i\ -2)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{\hbar^2}{4}$$

となるが，$\frac{\hbar^2}{4} = \hbar^2\left(\frac{4}{48}\right)^{\frac{1}{2}} < \hbar^2\left(\frac{5}{48}\right)^{\frac{1}{2}}$ なので不確定性関係は満たされている．

20. $\widehat{a} := (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(\widehat{x}+i\widehat{p})$ 及び $\widehat{a}^\dagger := (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(\widehat{x}-i\widehat{p})$ から $\widehat{x} = (\hbar/2)^{\frac{1}{2}}(\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger)$ 及び $\widehat{p} = (\hbar/2)^{\frac{1}{2}}(\widehat{a}-\widehat{a}^\dagger)/i$. すると

$$\widehat{x}\,|n\rangle = (\hbar/2)^{\frac{1}{2}}\left\{n^{\frac{1}{2}}\,|n-1\rangle + (n+1)^{\frac{1}{2}}\,|n+1\rangle\right\}$$

なので $\langle n|\,\widehat{x}\,|n\rangle = (\hbar/2)^{\frac{1}{2}}\left\{n^{\frac{1}{2}}\langle n|n-1\rangle + (n+1)^{\frac{1}{2}}\langle n|n+1\rangle\right\} = 0$. ここで，自己共役作用素（ハミルトニアン）の固有値が異なる場合に $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ であることを用いた．従って x の期待値は 0.

同様に $\widehat{p}|n\rangle = (\hbar/2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{i}\left\{n^{\frac{1}{2}}\,|n-1\rangle - (n+1)^{\frac{1}{2}}\,|n+1\rangle\right\}$ なので，上と同じ理由から $\langle n|\,\widehat{p}\,|n\rangle = 0$ が任意のエネルギー固有状態 $|n\rangle$ に対して成り立つ．従ってすべての状態 $|n\rangle$ に対して p の期待値は 0.

不確定性関係の計算のために，上の x に対する表式を使うと

$$\begin{aligned}(\triangle_n x)^2 &= \langle n|\,\widehat{x}^2\,|n\rangle - (\langle n|\,\widehat{x}\,|n\rangle)^2 = \langle n|\,\widehat{x}^2\,|n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2}\langle n|\,(\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger)^2\,|n\rangle = \langle n|\,\widehat{a}^2 + (\widehat{a}^\dagger)^2 + \widehat{a}\widehat{a}^\dagger + \widehat{a}^\dagger\widehat{a}\,|n\rangle.\end{aligned}$$

しかし $\widehat{a}^2\,|n\rangle = n^{\frac{1}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}}\,|n-2\rangle$ 及び $(\widehat{a}^\dagger)^2\,|n\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}}(n+2)^{\frac{1}{2}}\,|n+2\rangle$ から初めの 2 項は消える ($\langle n|n-2\rangle = 0 = \langle n|n+2\rangle$ だから)．従って

$$(\triangle_n x)^2 = \frac{\hbar}{2}\langle n|\,(n+1)^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\,|n\rangle = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$$

であり，同様に

$$(\triangle_n p)^2 = -\frac{\hbar}{2}\langle n|\,(\widehat{a}-\widehat{a}^\dagger)(\widehat{a}-\widehat{a}^\dagger)\,|n\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle n|\,(\widehat{a}\widehat{a}^\dagger+\widehat{a}^\dagger\widehat{a})\,|n\rangle = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$$

となって $(\triangle_n x)(\triangle_n p) = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$.

21. (i) 問題 9 から，$\widehat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ は固有値 $\hbar/2$ 及び $-\hbar/2$，それぞれに対する規格化された固有ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ 及び $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$ を持つことがわかっている．一般論からアンサンブルの状態が $|\psi\rangle = \binom{1}{0}$ のとき

$$\mathrm{Prob}(S_x = \frac{\hbar}{2}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

及び

$$\mathrm{Prob}(S_x = \frac{-\hbar}{2}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

(これらの和は 1 である．S_x の測定で，可能なのは $\hbar/2$ 及び $-\hbar/2$ だけなのでこれは正しい．)

(ii) S_y の測定について興味があるのは $\widehat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\left(\begin{smallmatrix}0&-i\\i&0\end{smallmatrix}\right)$ の固有ベクトルである．それは $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{i}$ 及び $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{i}{1}$ であり，それぞれ固有値 $\hbar/2$ 及び $-\hbar/2$ に対応する．従って

$$\mathrm{Prob}(S_y = \frac{\hbar}{2}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

及び

$$\mathrm{Prob}(S_y = \frac{-\hbar}{2}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

(iii) S_z の測定が S_y の理想測定の直後になされるとき，前者の測定の予測を与える状態は $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{i}$ ($\binom{1}{0}$ から S_y の固有値 $+\hbar/2$ の固有ベクトルへの「収縮」) である．従って

$$\mathrm{Prob}(S_z = \frac{\hbar}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}) = \left|\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

これは 1 より小さい．一方，最初の状態 $\binom{1}{0}$ は $\widehat{S}_z$ の固有値 $\hbar/2$ の固有ベクトルであり測定の結果，確率 1 で値 $\hbar/2$ を与える．

22. (a) (i) 2つの作用素 $\widehat{A}$ 及び $\widehat{B}$ のテンソル積 $\widehat{A}\otimes\widehat{B}$ の定義は $\widehat{A}\otimes\widehat{B}(\vec{\phi}\otimes\vec{\psi}) := (\widehat{A}\vec{\phi})\otimes(\widehat{B}\vec{\psi})$. 従って

$$\begin{aligned}\widehat{S}_x\otimes\widehat{S}_y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} &= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right]\\ &= \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(ii) 同様に

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{1}}\otimes\widehat{S}_z\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\\ &= \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right]+4\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]\right\}\\ &= \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

(iii) $\widehat{S}_x^{\mathrm{tot}} = \widehat{\mathbb{1}}\otimes\widehat{S}_x + \widehat{S}_x\otimes\widehat{\mathbb{1}}$ なので

$$\begin{aligned}\widehat{S}_x^{\mathrm{tot}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\\ &= \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) (i)

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\right\|^2 &= \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\right\rangle\\ &= \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\right\rangle = 1\times 5 = 5\end{aligned}$$

なので

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5}.$$

(ii) 同様に

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\|^2 = 2 \times 2 = 4$$

なので

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\| = 2.$$

(iii) 内積は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

であるが

$$\begin{aligned} (1,\, 0)^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times (i,\, 2)^* \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &= (1,\, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times (-i,\, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= 1 \times (-i + 2i) = i. \end{aligned}$$

となる．

$\vec{u} := \binom{1}{0}\binom{i}{2}$ 及び $\vec{v} := \binom{1}{1}\binom{1}{i}$ に対して $\vec{\psi} := \vec{u} + \vec{v}$ としよう．すると

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \langle \vec{\psi}, \vec{\psi} \rangle = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^* \\ &= 5 + 4 + i - i = 9. \end{aligned}$$

そして，規格化された $\vec{\psi}$ は

$$\vec{\psi} := \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) $\widehat{S}_z^{\mathrm{tot}} := \widehat{\mathbb{1}} \otimes \widehat{S}_z + \widehat{S}_z \otimes \widehat{\mathbb{1}}$ の固有ベクトルは明らかに $|\uparrow\uparrow\rangle := \binom{1}{0}\binom{1}{0}$ 及び $|\downarrow\downarrow\rangle := \binom{0}{1}\binom{0}{1}$ であり，それぞれ固有値 $\hbar$ 及び $-\hbar$ に対応する．規格

化された状態は $|\psi\rangle := \frac{1}{3}\left\{\binom{1}{0}\binom{i}{2} + \binom{1}{1}\binom{1}{i}\right\}$. 従って量子論の一般論によると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(S_z = \hbar;\, |\psi\rangle) = |\langle\uparrow\uparrow|\psi\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{9}\left|\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{9}\left|\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{9}\left|\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{9}|i+1|^2 = \frac{2}{9}.
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(S_z = -\hbar;\, |\psi\rangle) = |\langle\downarrow\downarrow|\psi\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{9}\left|\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{9}\left|\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{9}|0+i|^2 = \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

関連図書

Aspect, A., Dalibard, J. & Roger, G. (1982*a*), 'Experimental tests of Bell's inequalities using time-varying analysers', *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804–1807.

Aspect, A., Graingier, P. & Roger, G. (1981), 'Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem', *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460–467.

Aspect, A., Graingier, P. & Roger, G. (1982*b*), 'Experimental realization of EPR Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities', *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91–94.

Bell, J. (1987), *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Beltrametti, E. & Cassinelli, G. (1981), *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, London.

Birkhoff, G. & von Neumann, J. (1936), 'The logic of quantum mechanics', *Annals of Mathematics* **37**, 823–843.

Bohm, D. (1951), *Quantum Theory*, Prentice-Hall, New Jersey.

Bohm, D. & Hiley, B. (1993), *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum theory*, Routledge, London.

Borges, J. (1964), *Dreamtigers*, University of Texas Press, Austin, Texas. Transl. by M. Boyer & H. Morland.

Busch, P., Lahti, P. & Mittelstaedt, P. (1991), *The Quantum Theory of Measurement*, Springer-Verlag, London.

DeWitt, B. & Graham, N. (1973), *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton.

Dirac, P. (1958), *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford.

Eddington, A. (1920), *Space, Time and Gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge. p201.

Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. (1935), 'Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?', *Phys. Rev.* **47**, 777–780.

Everett, H. (1957), 'Relative state formulation of quantum mechanics', *Rev. Mod. Phys.* **29**, 141–149.

Fine, A. (1986), *The Shaky Game: Einstein, Realism and the Quantum Theory*, University of Chicago Press, Chicago.

Ghirardi, G., Rimini, A. & Weber, T. (1986), 'Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems', *Phys. Rev.* **D34**, 470–491.

Gleason, A. (1957), 'Measures on the closed subspaces of a Hilbert space', *Journal of Mathematics and Mechanics* **6**, 885–893.

Grayling, A. (1990), *An Introduction to Philosophical Logic*, Duckworth, London.

Hartle, J. (1968), 'Quantum mechanics of individual systems', *Am. J. Phys.* **36**, 704–712.

Heidegger, M. (1967), *What is a Thing?*, Regnery/Gateway Press, Indiana. Transl. W.B. Barton & V. Deutsch. First published in German as *Die Frage nach dem Ding.*

Heisenberg, W. (1952), *Philosophic Problems of Nuclear Science*, Pantheon, New York.

Holland, P. (1993), *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hughes, R. (1989), *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*, Harvard University Press, Harvard.

Isham, C. (1989), *Lectures on Groups and Vector Spaces*, World Scientific, London.

Isham, C. (1994), Prima facie questions in quantum gravity, *in* J. Ehlers & H. Friedrich, eds, 'Canonical Relativity: Classical and Quantum', Springer-Verlag, Berlin, pp. 1–21.

Jauch, J. (1973), *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, London.

Joos, E. & Zeh, H. (1985), 'The emergence of classical properties through interaction with the environment', *Zeitschrift für Physik* **B59**, 223–243.

Jung, C. (1983), Thoughts on the nature and value of speculative enquiry, *in* 'The Zofingia Lectures', Routledge & Kegan Paul, London.

Kochen, S. & Specker, E. (1967), 'The problem of hidden variables in quantum mechanics', *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59–87.

Lockwood, M. (1992), *Mind, Brain and the Quantum: The Compound I*, Blackwell, Oxford.

Lüders, G. (1951), 'Über die zustandsänderung durch den messprozess', *Annalen der Physik.* **8**, 322–328.

Margenau, H. (1949), 'Reality in quantum mechanics', *Phil. Science* **16**, 287–302.

Margenau, H. (1963*a*), 'Measurements and quantum states. Part I', *Phil. Science* **30**, 1–16.

Margenau, H. (1963*b*), 'Measurements and quantum states. Part II', *Phil. Science* **30**, 138–157.

Margenau, H. (1963*c*), 'Measurements in quantum mechanics', *Ann. Phys.* **23**, 469–485.

McKnight, J. (1952), 'An extended latency interpretation of quantum mechanical measurement', *Phil. Science* **25**, 209–222.

Omnès, R. (1992), 'Consistent interpretations of quantum mechanics', *Rev. Mod. Phys.* **64**, 339–382.

Omnès, R. (1994), *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton.

Park, J. (1968*a*), 'Quantum theoretical concepts of measurement: Part I', *Phil. Science* **35**, 205–231.

Park, J. (1968*b*), 'Quantum theoretical concepts of measurement: Part II', *Phil. Science* **35**, 389–411.

Park, J. & Margenau, H. (1968), 'Simultaneous measurement in quantum theory', *Int. J. Theor. Phys.* **1**, 211–283.

Pearle, P. (1986), Models for reduction, *in* R. Penrose & C. Isham, eds, 'Quantum Concepts in Space and Time', Clarendon Press, Oxford, pp. 84–108.

Penrose, R. (1989), *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford.

Peres, A. (1991), 'Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem', *Journal of Physics A* **24**, L175–L178.

Peres, A. (1993), *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic, Boston.

Popper, K. (1982), *Quantum Theory and the Schism in Physics*, Hutchinson, London.

Putnam, H. (1957), 'Three-valued logic', *Phil. Studies* **VIII**, 73–80.

Redhead (1989), *Incompleteness, Nonlocality, and Realism*, Clarendon Press, Oxford.

Reed, M. & Simon, B. (1972), *Methods of Mathematical Physics. I: Functional Analysis*, Academic Press, New York.

Reichenbach, H. (1944), *Philosophical Foundations of Quantum Mechanics*, University of California Press, Berkeley, California.

Scheibe, E. (1973), *The Logical Analysis of Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford.

Stapp, H. (1993), *Mind, Matter, and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, London.

Van Frassen, B. (1991), *Quantum Mechanics: An Empiricist View*, Clarendon Press, Oxford.

von Neumann, J. (1971), *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton.

Wheeler, J. & Zurek, W. (1983), *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, Princeton.

Wigner, E. (1961), Remarks on the mind-body question, *in* I. Good, ed., 'The Scientist Speculates', W. Heinemann, London.

Wigner, E. (1963), 'The problem of measurement', *American Journal of Physics* **31**, 6–15.

Williams, C. (1968), *Many Dimensions*, Faber, London.

訳者あとがき

本書は，量子論の構造的な基礎を記述した入門書である．著者の Chris J. Isham は，膨張宇宙の量子力学を長年研究してきた人であり，その視点から量子論と実在論の確執を基調に記述されている．

本書には次のような 3 つの特徴がある：

1. 量子力学の物理・数学・哲学の 3 つの側面が融合したバランスが図られている．多くの他の量子力学の教科書ではそれらが分離しているのと対照的である．
2. 量子力学特有の理論的構造に特化して記述している．第 4 章のような古典論の再構成や第 8 章，第 9 章などは他書にない部分である．そのかわり，応用で必要になる技術的な方法（偏微分方程式の境界問題・近似法・摂動論など量子力学に固有でないもの）の記述はない．これは量子力学に特有なものをあぶり出す効果を発揮している．
3. 物理・数学・哲学，どの分野の人でも，量子力学に入っていける構成になっている．特に，量子力学の論理構造をさまざまに吟味しようという流れは，多くの人の興味を引くと思う．「単なる数学上の特性に過剰な実在論的意味付けをすべきでない」というのが著者の視点のようだが，この本は教科書としてバランスのとれた記述になっている．

説明は丁寧で読みやすいので大学の学部学生から読めるであろうが，初歩的な波動力学や線形代数は前提である．この本だけでは量子力学の応用を含む実際の物理や，基礎となる数学の定理の証明，あるいは哲学的に奥深いところ，が完全な形でわかるわけではないので，他書も大いに参考にして頂きたい．

著者の専門の，膨張宇宙の量子力学とは「外部観測のない量子状態」の一例なのだが，概念的には，同種の量子力学上の現象がメゾスコピック，レーザー，ナノテク，量子計算，等のハイテクの領域に姿を現われている．こうしたフロントの研究者が量子力学の構造を改めて考察してみる際には，この教科書は大いに参考になると考える．

物理，数学，哲学の各方面から量子論の基礎構造に興味を持つ人々に広くお勧めします．

2003 年 1 月　訳者

索 引

ISBN 4-8427-0000-9

訳者略歴

佐藤　文隆（さとう　ふみたか）

1960 年 京都大学卒業
京都大学教授，基礎物理学研究所所長，
理学部部長を経て，
現在，甲南大学理工学部教授.
著書多数.

森川　雅博（もりかわ　まさひろ）

1982 年 東京大学卒業
京都大学助手を経て，
現在，お茶の水女子大学理学部教授.

Isham：量子論－その数学および構造の基礎－　2003 ©

2003 年 3 月 25 日　第 1 刷発行

訳　者　佐藤　文隆
　　　　森川　雅博
発行者　吉岡　誠

606-8225 京都市左京区田中門前町 87
株式会社 吉岡書店
(物理学叢書 93)
電話 (075)781-4747/振替 01030-8-4624

印刷・製本（株）太洋社

ISBN 4-8427-0309-1

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

J. J. Sakurai　桜井明夫訳 **現代の量子力学 上・下** 上 392頁　下 320頁	素粒子物理学の独創的理論家であった著者が，UCLA での多年の講義に基づき書き遺した現代的教科書．非相対論的量子力学の核心が，最近の理論・実験の発展に則し，新しい視点から明快かつ具体的に記述されている．
ジョージアイ　九後汰一郎訳 **物理学におけるリー代数** ―アイソスピンから統一理論へ―　224頁	Clashow と共に $SU(5)$に基づく素粒子の大統一理論を初めて提唱した著者が，その研究の苦闘の中で体得した豊富な実践的知識を込めて書いた，リー代数とその表現論のわかり易い解説書．
ジーガー　山本恵一・林　真至・青木和徳訳 **セミコンダクターの物理学** 上・320頁　下・340頁	電子輸送現象にかなりの頁数を費やしており，企業の研究者にとっても最適である．さらに多くの図面により，物理現象の把握に役立つ．
ゲプハルト・クライ　好村滋洋訳 **相転移と臨界現象** 378頁	ランダウの相転移論から始まり，先年ノーベル賞の対象となったウイルソンのくりこみ群までを，あまり数式を用いず実験例との対応を明らかにするため，豊富な図表を用いて親しみやすく解説した現代的入門書．
ストルコフ・レヴァニューク　疋田朋幸訳 **強誘電体物理入門** 248頁	強誘電体の相転移を構造相転移の一つとみなし，統一的に基礎的な立場から記述．物質の各論や応用などには殆どふれず，物理的なエッセンスのみを抽出して解説する両著者ともにこの分野の世界的権威である．
キューサック　遠藤裕久・八尾　誠訳 **構造不規則系の物理 上・下** 上 286頁　下 282頁	構造不規則系の研究は物理学の魅力ある分野である．本書は構造不規則系の静的・動物構造，電子状態，またその応用について，実験，理論両面にわたる初めての総合的な教科書．
アブリコソフ　東辻千枝子・松原武生訳 **金属物理学の基礎 上・下** 上 376頁　下 332頁	この分野で世界をリードしてきた著者が固体電子論の立場から集大成した．メソスコピック系や高温超伝導・セラミックスなども明快に解説されており，特に量子効果がマクロに観測される領域の部分は圧巻である．
メンスキー　町田　茂訳 **量子連続測定と径路積分** 272頁	量子論の基本問題を連続測定の観点から径路積分を使ってとらえ直し，初期宇宙での時間の出現なども論じている．日本語版では多くの追加がされており，読みやすい入門書となっている．
チャンドラセカール　木村初男・山下　護訳 **液晶の物理学** 原書第2版　544頁	最近20年の新成果を取り入れて全面的に改訂増補された．豊富な実験データの図版を用いて簡潔・明快であり，文献リストも非常に充実したアップツーデートな入門書である．
スティックス　田中茂利・長　照二訳 **プラズマの波動 上・下** 上 344頁　下 364頁	冷たいプラズマの波動の分類と特徴から始まり，プラズマの最も魅力的かつ特徴的なプラズマ粒子の集団的相互作用に基づく無衝突減衰（ランダウおよびサイクロトロン減衰）から弱乱流プラズマの準線形理論へと展開する．
スワンソン　青山秀明他訳 **経路積分法** ―量子力学から場の理論へ―　502頁	汎関数空間やグラスマン数など，初学者がとまどいやすい部分についても非常に丁寧な導入を行なっており，場の理論およびその素粒子物理への応用について概観するのにも適している．

キャレン　小田垣　孝訳 **熱力学および統計物理入門** 上・下 第2版　上330頁　下368頁	世界的に高い評価を得ている熱力学の代表的な教科書である．公理に基づく熱力学大系の構築は他に類をみない．上巻では平衡状態を定める条件が論じられ，下巻では相転移の熱力学への導入が詳しく論じられる．
チェイキン，ルベンスキー　松原武生・東辻千枝子他訳 **現代の凝縮系物理学** 上 396頁　下 376頁	凝縮系の物理学を現代的な視点で扱った待望の書．臨界現象とくりこみ群の方法に特に注目し，扱う対象は液体・結晶・不整合結晶・準結晶・非晶質系に及ぶ．250以上の図，多くの演習問題，文献リストを含む．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **粒子と量子場** 場の量子論シリーズ①　432頁	簡単な歴史的記述から入り，相対性原理と量子力学の理論を用いて素粒子の性質を論じることにより「場の量子論」が自然の帰結として現れてくる．貴重な参考文献であると同時に，教科書として適切である．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **量子場の理論形式** 場の量子論シリーズ②　446頁	本書はS. Weinbergによる「場の量子論」全6巻の第2巻である．正準形式，ファイマン則，量子電磁理論，経路積分，くりこみ，などの理論形式の核となる部分が論じられる．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **非可換ゲージ理論** 場の量子論シリーズ③　376頁	現代の素粒子論における標準理論の基礎をなす非可換ゲージ理論が導入され，また場の理論の現代的手法である有効場の理論，くりこみ群，大域的対称性の自発的破れの一般論が展開される．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **場の量子論の現代的諸相** 場の量子論シリーズ④　342頁	くりこみ群や対称性の破れにとって重要な演算子積展開，電弱理論のゲージ対称性の自発的破れが論じられる．これとは対称的に量子力効果として対称性を破るアノマリーと，それによる物理的結論が述べられる．
ワインバーグ　青山・有末・杉山訳 **超対称性：構成と超対称標準模型** 場の量子論シリーズ⑤　380頁	最初に超対称性の歴史について述べ，超対称性代数を構成する．その後，超対称性を持つ場の理論，ゲージ理論を構成し，それらに基づき，標準模型を超対称性を持つように拡張した模型を調べる．
Y. イムリー　樺沢宇紀訳 **メソスコピック物理入門** 314頁	固体電子の局在と緩和の一般論，典型的な題材である微細な系の永久電流と量子輸送，量子ホール効果，超伝導メソスコピック系，および雑音の問題を著者一流の観点から論じる．
S. A. サフラン　好村滋行訳 **コロイドの物理学** —表面・界面・膜面の熱統計力学—　368頁	熱統計力学の立場から新たに捉え直した世界的にユニークな書である．界面張力，ラフニング転移，ぬれ，界面間の相互作用，膜弾性，自己会合などの問題を扱う，学部3・4年から大学院生以上の学生などを対象とする．
スタウファー，アハロニー　小田垣孝訳 **パーコレーションの基本原理** (原書第2版・修訂版)　332頁	初版以来多くの発見およびより精密な数値データが加えられ，さらに新たに導入された概念が含められている．また演習が付け加えられ，教科書としてさらに使いやすくなっている．
デュラン　中西　秀・奥村　剛訳 **粉粒体の物理学** —砂と粉と粒子の世界への誘い—　310頁	初等的な力学から解き起こし，最近の研究の成果までを初学者にもわかるようにまとめている．物理学の立場から書かれた粉粒体の教科書としては，(驚くべきことに)本書はほとんど唯一のものであろう．

ジャクソン　　西田　稔訳 **電　磁　気　学** (原書第3版)　　上 614頁　下 576頁	この原書第3版では，電磁気学の基礎として，わかりやすく洗練された内容と，新たな増補，そして最近の重要な応用問題の追加がなされている．定評のあった第2版にも増して，標準的教科書としての価値を高めている．
シック　　岩渕修一訳 **量　子　井　戸** (原書補訂版)　　152頁	多数の訳注に加え，原書を理解するうえで必要な量子力学，統計物理学，固体電子論の基礎事項や原書の補足説明を補遺として加えられ，原書の$\frac{1}{2}$に達している．

別　巻

井上　健監修・三枝寿勝・瀬藤憲昭著 **量　子　力　学　演　習** —シッフの問題解説—　　392頁	理論的基礎に重点をおきながら，実験・技術を志ざす学生にも容易に理解できる演習書たるべく，代表的教科書として定評あるシッフの同書より，章末の各問題を詳細に解説した．
井上　健監修・瀬藤憲昭・吉田俊博著 **古典力学の問題と解説** —ゴールドスタイン（第2版）に基づいて—　434頁	近代的な量子力学・場の理論・物性論を学ぶ際の踏み台として，古典力学を新しい見地から解説された，一般力学の標準的教科書と，誉れの高いゴールドスタイン（第2版）の章末の問題を詳細に解説した最新の演習書．
大槻義彦監修・飯高敏晃他著 **演習現代の量子力学** —J. J. サクライの問題解説—　　336頁	本書は，J. J. サクライの教科書「現代の量子力学」の章末問題の解説である．この解説は1991年度，早稲田大学の物理学科，応用物理学科のはじめて量子力学を学ぶ学部3年生を対象に行った演習に基づいている．
F. クローズ　井上　健訳・九後汰一郎補遺 訂正増補 **宇宙という名の玉ねぎ** —クォーク達と宇宙の素性—　　268頁	物質の根源の姿を追求してきた今世紀の素粒子物理学の，心躍る発見と認識の深化のプロセスを読者に追体験させてくれる．数式を用いずに一般向けに解説．前著に「その後の発展と歴史的経緯に対する補遺」追加．